## Exercice : Un lob au water-polo

**20 points**

**1)** La caméra ne bouge pas par rapport au bassin, lui-même immobile par rapport au sol. Le mouvement est donc décrit dans le **référentiel terrestre**.

**2)** **Cadre de l'étude.** Le système est le ballon. On lui applique la deuxième loi de Newton dans le référentiel terrestre. C'est possible car ce référentiel peut être considéré comme galiléen pendant un tir, qui dure à peine une seconde, et car le ballon garde la même masse $m$.

**Forces.** Les actions de l'air étant négligées dans ce modèle, le ballon ne subit qu'une force, son poids, de vecteur $m\,\vec{g}$ ; il est en chute libre.

**Application de la loi.** La somme des forces extérieures est égale à $m\,\vec{a}$ :

$$m\,\vec{g} = m\,\vec{a} \qquad \text{d'où, en divisant par } m \neq 0 : \qquad \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

**Projection.** L'axe O$x$ est horizontal, donc perpendiculaire à $\vec{g}$. L'axe O$y$ est vertical et de sens opposé à celui de $\vec{g}$. Par conséquent :

$$\boxed{a_x = 0} \qquad \boxed{a_y = -g}$$

**3)** On note L une longueur, M une masse et T une durée. L'unité de $g$ ($\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$) donne $[g] = \mathrm{L\,T^{-2}}$, et celle de $G$ ($\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$) donne $[G] = \mathrm{L^3\,M^{-1}\,T^{-2}}$. De plus $[M_\mathrm{T}] = \mathrm{M}$ et $[R_\mathrm{T}] = \mathrm{L}$. On cherche la dimension de chaque second membre.

- Relation a. : $\left[\dfrac{G\,M_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}}\right] = \dfrac{\mathrm{L^3\,M^{-1}\,T^{-2}} \times \mathrm{M}}{\mathrm{L}} = \mathrm{L^2\,T^{-2}}$. C'est le carré d'une vitesse : relation non homogène.
- Relation b. : $\left[\dfrac{G\,R_\mathrm{T}^2}{M_\mathrm{T}}\right] = \dfrac{\mathrm{L^3\,M^{-1}\,T^{-2}} \times \mathrm{L^2}}{\mathrm{M}} = \mathrm{L^5\,M^{-2}\,T^{-2}}$. Relation non homogène.
- Relation c. : $\left[\dfrac{G\,M_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}^2}\right] = \dfrac{\mathrm{L^3\,M^{-1}\,T^{-2}} \times \mathrm{M}}{\mathrm{L^2}} = \mathrm{L\,T^{-2}} = [g]$. Relation homogène.

**Conclusion :** la relation homogène est la relation c. : $\boxed{g = \dfrac{G\,M_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}^2}}$

**4)** L'accélération s'obtient en dérivant la vitesse par rapport au temps. Pour chaque coordonnée :

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = a_x = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = a_y = -g$$

On prend une primitive de chaque membre ; $A$ et $B$ sont deux nombres à déterminer :

$$v_x(t) = A \qquad v_y(t) = -g\,t + B$$

Or, au départ ($t = 0$), la vitesse est $\vec{v}_0$, de valeur $v_0$ et inclinée de $\alpha$ : $v_x(0) = v_0 \cos\alpha$ et $v_y(0) = v_0 \sin\alpha$. On en tire $A = v_0 \cos\alpha$ et $B = v_0 \sin\alpha$, puis :

$$\boxed{v_x(t) = v_0 \cos\alpha} \qquad \boxed{v_y(t) = -g\,t + v_0 \sin\alpha}$$

**5)** D'après la question 4) :

- $v_x$ garde toujours la même valeur : ses points doivent s'aligner, aux irrégularités près, parallèlement à l'axe des temps. C'est le cas de la **courbe B** ;
- $v_y$ varie de façon affine avec le temps, avec une pente $-g$ négative : ses points doivent s'aligner sur une droite qui descend. C'est le cas de la **courbe A**.

**Conclusion :** la courbe A représente $v_y$ et la courbe B représente $v_x$.

*Vérification :* la courbe A passe de $4{,}5\,\text{m·s}^{-1}$ à environ $-5{,}3\,\text{m·s}^{-1}$ en $1{,}0\,\text{s}$, soit une pente voisine de $-9{,}8\,\text{m·s}^{-2}$, en accord avec $-g$.

**6)** On lit les valeurs de la figure 2 à la date $t = 0$ (à $0{,}1\,\text{m·s}^{-1}$ près) :

$$v_x(0) = 5{,}0\,\text{m·s}^{-1} \qquad v_y(0) = 4{,}5\,\text{m·s}^{-1}$$

**Valeur de la vitesse.** $v_x(0)$ et $v_y(0)$ sont les coordonnées de $\vec{v}_0$ dans un repère orthonormé, donc (théorème de Pythagore) :

$$v_0 = \sqrt{v_x(0)^2 + v_y(0)^2} = \sqrt{5{,}0^2 + 4{,}5^2} = \sqrt{45{,}25} \approx 6{,}73\,\text{m·s}^{-1} \qquad \boxed{v_0 \approx 6{,}7\,\text{m·s}^{-1}}$$

**Angle.** $\vec{v}_0$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ; le côté opposé à $\alpha$ est $v_y(0)$ et le côté adjacent $v_x(0)$ :

$$\tan\alpha = \frac{v_y(0)}{v_x(0)} = \frac{4{,}5}{5{,}0} = 0{,}90 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \arctan(0{,}90) \qquad \boxed{\alpha \approx 42^\circ}$$

(calculatrice en degrés). Selon la lecture, on accepte $v_0$ de $6{,}6$ à $6{,}9\,\text{m·s}^{-1}$ et $\alpha$ de $41^\circ$ à $43^\circ$.

**7)** On passe de la position à la vitesse par dérivation : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x(t)$ et $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y(t)$. On cherche à nouveau des primitives, avec deux nombres $D$ et $E$ :

$$x(t) = v_0\cos\alpha \times t + D \qquad y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin\alpha \times t + E$$

Au départ, C est à la verticale de O, à la hauteur $h$ : $x(0) = 0$ impose $D = 0$ et $y(0) = h$ impose $E = h$. Finalement :

$$\boxed{x(t) = v_0\cos\alpha \times t} \qquad \boxed{y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin\alpha \times t + h}$$

**8)** Pour obtenir $y$ en fonction de $x$, on exprime la date à partir de $x(t)$, car $v_0\cos\alpha \neq 0$ : $t = \dfrac{x}{v_0\cos\alpha}$.
On remplace $t$ dans $y(t)$ :

$$y = -\frac{1}{2}\,g \times \frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + v_0\sin\alpha \times \frac{x}{v_0\cos\alpha} + h$$

Dans le deuxième terme, $v_0$ se simplifie et $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$ :

$$\boxed{y(x) = -\frac{g}{2\,v_0^2\cos^2\alpha}\,x^2 + x\tan\alpha + h}$$

**9) Stratégie.** L'équation précédente donne la hauteur du *centre* du ballon. Le ballon occupe en plus $r = 0{,}11\,\text{m}$ au-dessus et au-dessous de ce centre. L'attaquant marque si :

- en $x = 2{,}50\,\text{m}$ (gardien), le bas du ballon est plus haut que la main : $y(2{,}50) - r > 1{,}70\,\text{m}$ ;
- en $x = 5{,}00\,\text{m}$ (cage), le haut du ballon est plus bas que la barre : $y(5{,}00) + r < 0{,}90\,\text{m}$, et le bas du ballon n'a pas touché l'eau : $y(5{,}00) - r > 0$.

On garde les valeurs non arrondies dans les calculs.

**Devant le gardien :**

$$y(2{,}50) = -\frac{9{,}81}{2 \times 6{,}7^2 \times (\cos 42°)^2} \times 2{,}50^2 + 2{,}50 \times \tan 42° + 1{,}10 \approx 2{,}11\,\text{m}$$

$$y(2{,}50) - r \approx 2{,}11\,\text{m} - 0{,}11\,\text{m} \qquad \boxed{y(2{,}50) - r \approx 2{,}00\,\text{m} > 1{,}70\,\text{m}}$$

Le ballon passe environ $30\,\text{cm}$ au-dessus de la main : le gardien ne peut pas l'intercepter.

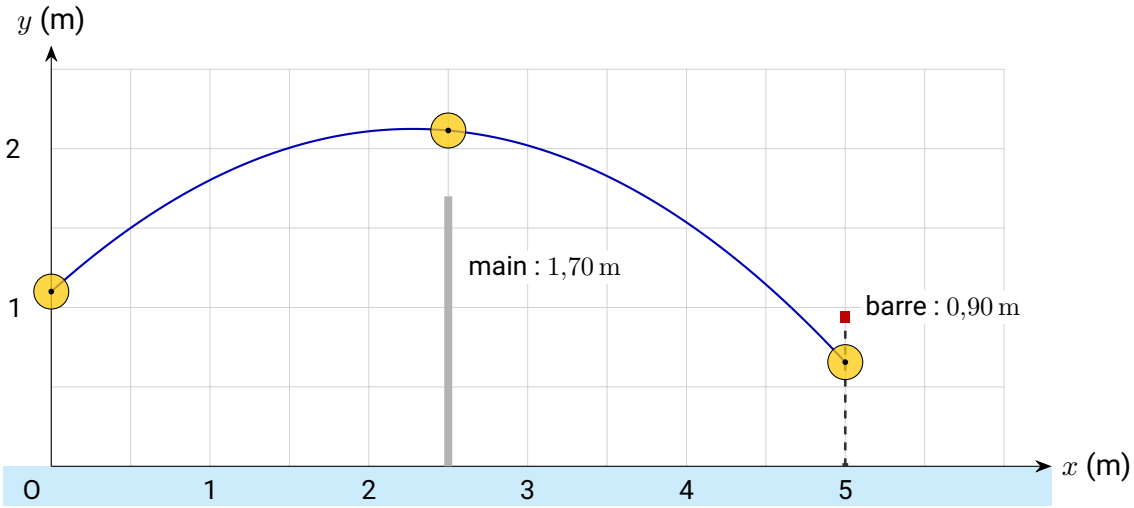
**À l'entrée de la cage :**

$$y(5{,}00) = -\frac{9{,}81}{2 \times 6{,}7^2 \times (\cos 42°)^2} \times 5{,}00^2 + 5{,}00 \times \tan 42° + 1{,}10 \approx 0{,}66\,\text{m}$$

$$\boxed{y(5{,}00) + r \approx 0{,}77\,\text{m} < 0{,}90\,\text{m}} \qquad \boxed{y(5{,}00) - r \approx 0{,}55\,\text{m} > 0}$$

Le haut du ballon passe environ $13\,\text{cm}$ sous la barre, et le ballon est encore nettement au-dessus de l'eau.

**Conclusion :** les trois conditions sont remplies, le lob est réussi : **l'attaquant marque**.




Le ballon (à l'échelle) au départ, au niveau du gardien et au niveau de la cage.