Calculatrice autorisée

Exercice : Un lob au water-polo

20 points

En pleine action de jeu, un attaquant de water-polo remarque que le gardien de l'équipe adverse s'est éloigné de sa cage. Il tente de le lober : le ballon doit passer par-dessus le bras tendu du gardien, puis retomber assez vite pour entrer dans la cage. Une caméra immobile, posée au bord du bassin, filme l'action ; un logiciel permet ensuite de repérer, image après image, la position du centre C du ballon.

Modèle et notations

- On étudie le ballon, de masse m. La poussée d'Archimède et les frottements dus à l'air ne sont pas pris en compte.
- On utilise le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ dont l'origine O est à la surface de l'eau. L'axe Ox est horizontal, dirigé vers la cage ; l'axe Oy est vertical et pointe vers le ciel. Le point C ne quitte pas le plan (Oxy).
- Le ballon quitte la main de l'attaquant à la date $t = 0$. À cet instant, C se trouve à la verticale de O, à la hauteur h et sa vitesse $\vec{v}_0$ est inclinée d'un angle α au-dessus de l'horizontale.

Données

- Hauteur initiale du centre du ballon au-dessus de l'eau : $h = 1{,}10\,\text{m}$; rayon du ballon : $r = 11\,\text{cm}$.
- Distance de O au plan de la cage : $5{,}00\,\text{m}$; le bas de la barre transversale est à $0{,}90\,\text{m}$ au-dessus de l'eau.
- Valeur du champ de pesanteur : $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.
- Constante de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$.

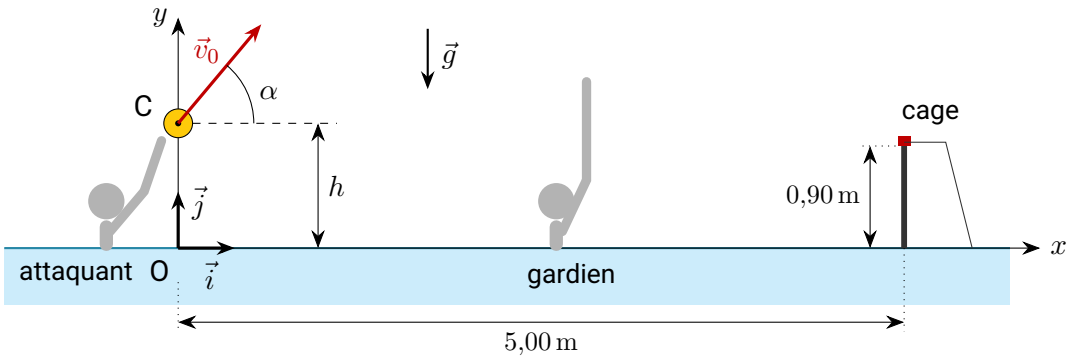


Figure 1. La situation à la date $t = 0$ (schéma sans échelle)

1) Préciser le référentiel par rapport auquel la caméra filme le mouvement du ballon.

2) En partant de la deuxième loi de Newton, dont on rappellera les conditions d'application, exprimer le vecteur accélération du point C, noté $\vec{a}$, et en donner les deux coordonnées a_x et a_y.

3) On désigne par M_T et R_T la masse et le rayon de la Terre. Une seule des relations suivantes est homogène. Trouver laquelle par une analyse dimensionnelle.

a. $g = \dfrac{G\,M_\text{T}}{R_\text{T}}$ b. $g = \dfrac{G\,R_\text{T}^2}{M_\text{T}}$ c. $g = \dfrac{G\,M_\text{T}}{R_\text{T}^2}$

4) Établir que, pendant le vol du ballon : $v_x(t) = v_0 \cos\alpha$ et $v_y(t) = -g\,t + v_0 \sin\alpha$.

La figure 2 rassemble les valeurs, obtenues par pointage, des coordonnées v_x et v_y de la vitesse du point C au cours du temps. Les petites irrégularités viennent de l'imprécision du pointage.

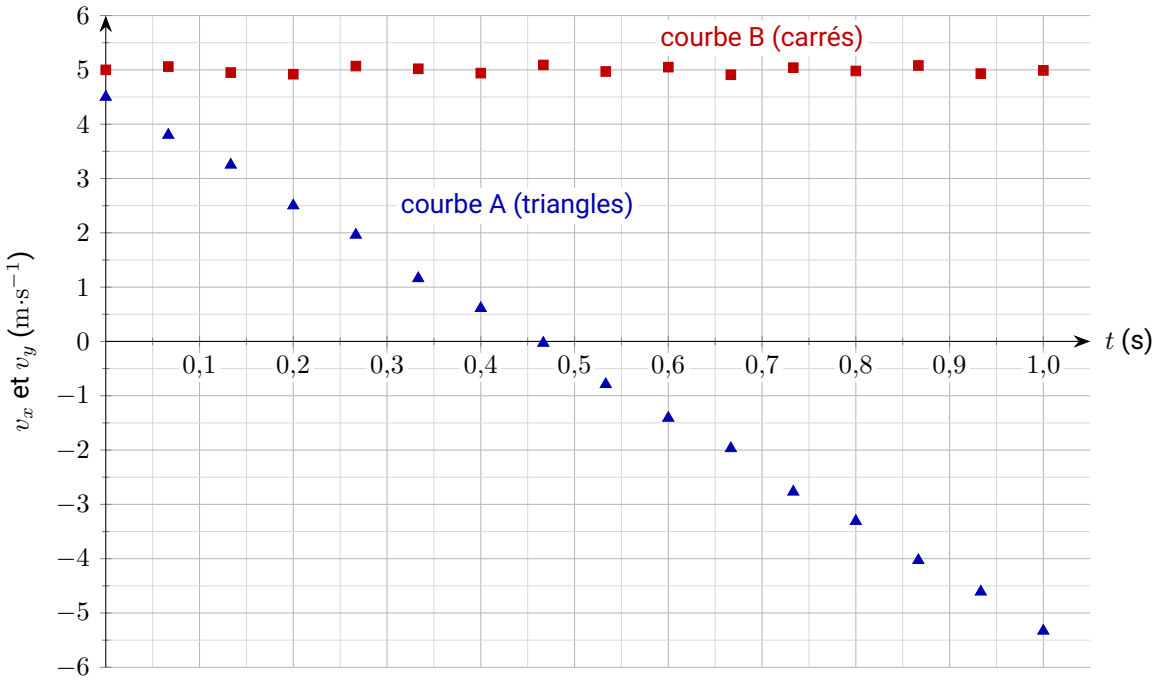


Figure 2. Coordonnées de la vitesse du centre du ballon en fonction du temps

5) Associer à chacune des courbes A et B de la figure 2 la coordonnée qu'elle représente. Justifier à l'aide de la question précédente.

6) En exploitant la figure 2, montrer que la vitesse initiale a pour valeur $v_0 \approx 6{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ et que $\alpha \approx 42°$.

Dans la suite, on prendra $v_0 = 6{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ *et* $\alpha = 42°$.

7) Exprimer en fonction de t les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du point C.

8) Montrer alors que le point C décrit la courbe d'équation : $y(x) = -\dfrac{g}{2\,v_0^2\cos^2\alpha}\,x^2 + x\tan\alpha + h$.

9) Le gardien se tient à $2{,}50\,\mathrm{m}$ de O, sur la trajectoire ; sa main levée atteint au plus $1{,}70\,\mathrm{m}$ au-dessus de l'eau. L'attaquant marque-t-il ?

Cette question demande de l'initiative : décrire les étapes du raisonnement et les calculs effectués. Une recherche inaboutie mais clairement exposée sera prise en compte.