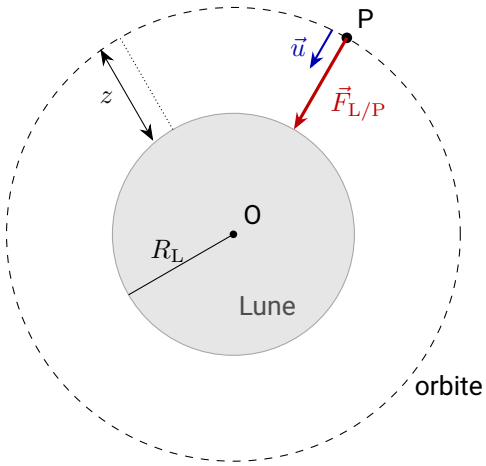
Exercice 1 : Cartographier la gravité de la Lune

9,5 points

Partie A : l'orbite des deux sondes

1) et **2)** La sonde P se trouve à la distance $\mathrm{OP} = R_\mathrm{L} + z$ du centre de la Lune : l'altitude se compte depuis la surface. Le vecteur $\vec{u}$ part de P et vise O.



La force de gravitation est attractive : elle a la direction de la droite (PO) et le sens de $\vec{u}$. La loi de Newton de la gravitation, appliquée à deux corps à symétrie sphérique dont les centres sont à la distance $R_\mathrm{L} + z$, donne :

$$\boxed{\vec{F}_{\mathrm{L/P}} = \frac{G\,m\,M_\mathrm{L}}{(R_\mathrm{L}+z)^2}\,\vec{u}}$$

3) Le champ de gravitation en P est la force subie par unité de masse : $\vec{F}_{\mathrm{L/P}} = m\,\vec{\mathcal{G}}$, d'où

$$\boxed{\vec{\mathcal{G}} = \frac{G\,M_\mathrm{L}}{(R_\mathrm{L}+z)^2}\,\vec{u}}$$

La masse m de la sonde n'intervient pas dans ce champ.

4) Système : la sonde, de masse m constante. Référentiel : sélénocentrique, supposé galiléen. Force : $\vec{F}_{\mathrm{L/P}}$ seule.

Deuxième loi de Newton : $m\,\vec{a} = \vec{F}_{\mathrm{L/P}}$, donc

$$\boxed{\vec{a} = \frac{G\,M_\mathrm{L}}{(R_\mathrm{L}+z)^2}\,\vec{u} = \vec{\mathcal{G}}}$$

5) Dans le repère de Frenet lié à la sonde, de vecteurs $\vec{u}_\mathrm{T}$ (tangent à l'orbite, orienté selon le déplacement) et $\vec{u}_\mathrm{N}$ (normal, orienté vers le centre O, donc égal à $\vec{u}$), l'accélération d'un point qui décrit un cercle de rayon $r = R_\mathrm{L} + z$ s'écrit :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_\mathrm{T} + \frac{v^2}{r}\,\vec{u}_\mathrm{N}$$

Le résultat de la question 4 ne contient aucun terme selon $\vec{u}_\mathrm{T}$. L'identification des composantes

tangentielles impose $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$: la sonde parcourt son orbite à vitesse de valeur fixe, son mouvement circulaire est **uniforme**.

6) On compare cette fois les composantes normales (selon $\vec{u}_\mathrm{N} = \vec{u}$) :

$$\frac{v^2}{R_\mathrm{L}+z} = \frac{G\,M_\mathrm{L}}{(R_\mathrm{L}+z)^2} \quad\Longrightarrow\quad v^2 = \frac{G\,M_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L}+z} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{v = \sqrt{\frac{G\,M_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L}+z}}}$$

(la racine positive, v étant une valeur).

7) Le mouvement étant uniforme, la sonde parcourt la longueur de l'orbite, $2\pi(R_\mathrm{L}+z)$, en une période T :

$$T = \frac{2\pi(R_\mathrm{L}+z)}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{(R_\mathrm{L}+z)^3}{G\,M_\mathrm{L}}}$$

Avec $R_\mathrm{L}+z = 1\,737\,\mathrm{km} + 40\,\mathrm{km} = 1\,777\,\mathrm{km} = 1{,}777\times10^6\,\mathrm{m}$ (en mètres, puisque G est en unités SI) :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(1{,}777\times10^6\,\mathrm{m})^3}{6{,}67\times10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}\times 7{,}35\times10^{22}\,\mathrm{kg}}} \approx \boxed{6{,}72\times10^3\,\mathrm{s}}$$

soit environ $1\,\mathrm{h}\,52\,\mathrm{min}$.

En un jour terrestre ($24\,\mathrm{h} = 86\,400\,\mathrm{s}$), on compte $\dfrac{86\,400\,\mathrm{s}}{6{,}72\times10^3\,\mathrm{s}} \approx 12{,}9$ révolutions : un peu moins de 13, en accord avec l'introduction.

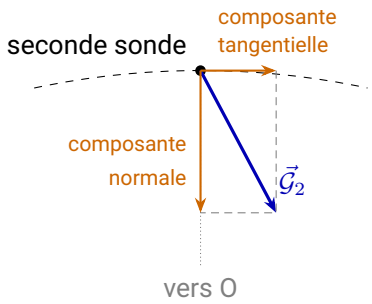
(La vitesse correspondante est $v \approx 1{,}66\times10^3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.)

8) D'après la question 4, l'accélération de chaque sonde est égale au champ de gravitation à l'endroit où elle passe : $\vec{a}_1 = \vec{\mathcal{G}}_1$ et $\vec{a}_2 = \vec{\mathcal{G}}_2$.

Sonde de tête : $\vec{\mathcal{G}}_1$ est centripète, il n'a pas de composante selon $\vec{u}_\mathrm{T}$; sa vitesse n'évolue donc pas ($\mathrm{d}v_1/\mathrm{d}t = 0$).

Seconde sonde : $\vec{\mathcal{G}}_2$ penche vers l'avant. En le décomposant dans le repère de Frenet (ci-contre), on trouve une composante tangentielle tournée vers l'avant : $\dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} > 0$: cette sonde accélère.

La seconde sonde devient plus rapide que celle qui la précède : elle la rattrape peu à peu. La distance L **diminue**.



Décomposition de $\vec{\mathcal{G}}_2$ (mouvement vers la droite).

Partie B : mesurer la distance par interférométrie

9) Pour obtenir des interférences stables, les deux ondes doivent avoir la même fréquence et garder un déphasage constant (ondes cohérentes). C'est le cas ici : les faisceaux 1 et 2 sont deux parts d'un même faisceau laser, séparé par la lame A. Ils parcourent des chemins différents puis se rejoignent en D et sur le détecteur, où ils interfèrent.

10) On parle d'interférence constructive quand les deux ondes se superposent **en phase** : leurs

crêtes coïncident. Il faut pour cela que la différence de marche soit égale à un nombre entier de longueurs d'onde, $\delta = k\,\lambda$ (k entier). L'amplitude de la superposition est alors **maximale**.

11) Les deux faisceaux partent ensemble de A et se retrouvent en D. La différence de marche est l'écart entre les longueurs des chemins suivis :

$$\delta = (\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CD}) - \mathrm{AD} = (L + h + L) - h \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\delta = 2L}$$

Le trajet BC et le trajet AD, de même longueur h, se compensent.

12) Avec une distance $L - d$, le même calcul donne $\delta' = 2(L - d)$. La variation vaut :

$$\Delta\delta = \delta' - \delta = 2(L - d) - 2L = -2d$$

La différence de marche diminue bien de $2d$: le faisceau 1 fait un aller et un retour entre les sondes, il gagne donc deux fois le rapprochement.

13) Une interférence constructive correspond à $\delta = k\,\lambda$; la suivante, quand δ diminue, à $\delta' = (k-1)\,\lambda$. Entre les deux, $|\Delta\delta| = k\lambda - (k-1)\lambda = \lambda$.

D'après la question 12, $|\Delta\delta| = 2d$. Donc $2d = \lambda$, soit $\boxed{d = \dfrac{\lambda}{2}}$.

14) La plus petite variation mesurable correspond au passage d'une interférence constructive à la suivante :

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2} = \frac{1\,550\,\mathrm{nm}}{2} = \boxed{775\,\mathrm{nm}} = 7{,}75 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

Comparaison : $\dfrac{d_{\min}}{L} = \dfrac{7{,}75 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}}{1{,}50 \times 10^{5}\,\mathrm{m}} \approx 5{,}2 \times 10^{-12}$. L'interféromètre décèle une variation de moins d'un micromètre sur une distance de $150\,\mathrm{km}$, soit quelques millionièmes de millionième de la distance : une sensibilité remarquable.

Exercice 2 : Un complément de calcium

10,5 points

1) Lors d'une dilution, le soluté prélevé se retrouve en totalité dans la fiole : $C_0\,V_0 = C_\mathrm{B}\,V_\mathrm{B}$; on note V_0 le volume prélevé de $\mathrm{S_0}$ et V_B la capacité de la fiole jaugée. Le facteur de dilution vaut

$$F = \frac{C_0}{C_\mathrm{B}} = \frac{2{,}40\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}}{2{,}40 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}} = 100 \quad \text{donc} \quad V_0 = \frac{V_\mathrm{B}}{100}$$

Fiole de $100{,}0\,\mathrm{mL}$: $V_0 = 1{,}0\,\mathrm{mL}$, aucune pipette ne convient ; fiole de $250{,}0\,\mathrm{mL}$: $V_0 = 2{,}5\,\mathrm{mL}$, aucune pipette non plus ; fiole de $500{,}0\,\mathrm{mL}$: $V_0 = 5{,}0\,\mathrm{mL}$, qui correspond à une pipette disponible.

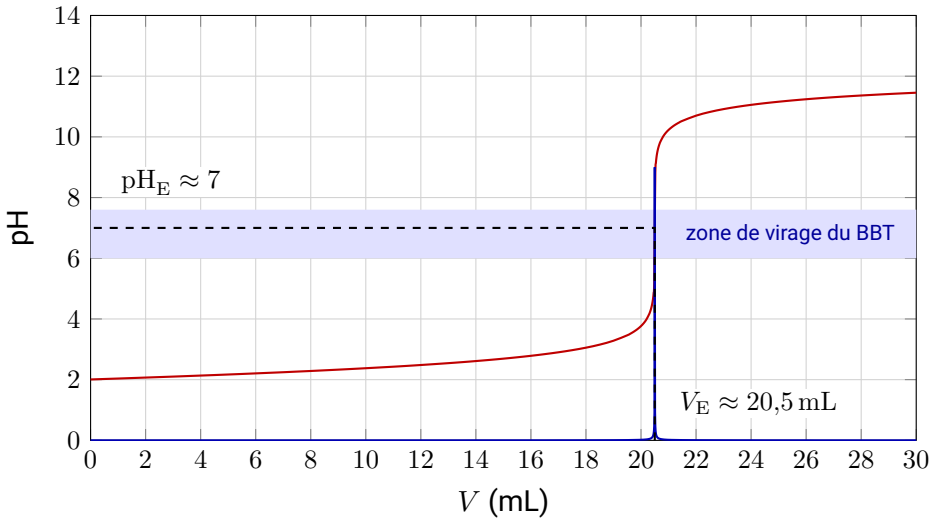
On prélève donc $5{,}0\,\mathrm{mL}$ de $\mathrm{S_0}$ avec la **pipette jaugée de** $5{,}0\,\mathrm{mL}$, on les verse dans la **fiole jaugée de** $500{,}0\,\mathrm{mL}$ et on ajuste le niveau avec de l'eau distillée jusqu'au repère, puis on agite pour homogénéiser.

2) L'espèce titrée est l'ion oxonium (les ions calcium sont restés sur la résine), l'espèce titrante est

l'ion hydroxyde :

$$\mathrm{H_3O^+(aq) + HO^-(aq) \longrightarrow 2\,H_2O\,(l)}$$

À l'équivalence, les ions hydroxyde apportés par la burette et les ions oxonium présents au départ sont dans le rapport des nombres stœchiométriques : aucun des deux ne reste en excès. Avec des coefficients égaux à 1 : $n(\mathrm{HO^-})_{\text{versés à l'équivalence}} = n(\mathrm{H_3O^+})_{\text{éluat}}$.



3) Le volume équivalent est l'abscisse du pic de la courbe dérivée, au milieu du saut de pH : $\boxed{V_\mathrm{E} = 20{,}5\,\mathrm{mL}}$ (lecture acceptée entre $20{,}3\,\mathrm{mL}$ et $20{,}7\,\mathrm{mL}$, la petite graduation valant $0{,}5\,\mathrm{mL}$). Sur la courbe pH $= f(V)$, ce volume correspond à $\boxed{\mathrm{pH_E} \approx 7}$ (entre 6,5 et 7,5 accepté) ; le saut s'étend d'environ 4 à 10. On accepte aussi « pH à l'équivalence voisin de 7, au milieu du saut », justifié par le titrage d'un acide fort par une base forte : à l'équivalence, le mélange ne contient que de l'eau et des ions spectateurs.

Pour repérer l'équivalence, il faut un indicateur dont la zone de virage englobe le pH à l'équivalence : sa teinte bascule pour une goutte versée, au milieu du saut.

- violet de méthyle (0,0 à 1,6) : le pH de l'éluat vaut déjà 2,0 au départ, son virage est donc achevé avant le début du titrage ;
- carmin d'indigo (11,6 à 14,0) : sa zone est au-dessus du saut, le pH du mélange ne l'atteint jamais (moins de 11,5 à $30\,\mathrm{mL}$) ;
- bleu de bromothymol (6,0 à 7,6) : sa zone contient $\mathrm{pH_E} \approx 7$.

Le **bleu de bromothymol** est donc le bon choix : jaune tant que l'acide est en excès, le mélange vire au bleu à l'équivalence.

4) D'après la relation d'équivalence de la question 2 :

$$n(\mathrm{H_3O^+}) = C_\mathrm{B}\,V_\mathrm{E} = 2{,}40 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}} \times 20{,}5 \times 10^{-3}\,\mathrm{L} = \boxed{4{,}92 \times 10^{-4}\,\mathrm{mol}}$$

soit environ $4{,}9 \times 10^{-4}\,\mathrm{mol}$, comme annoncé. (Avec la tolérance de lecture, on obtient entre $4{,}87 \times 10^{-4}\,\mathrm{mol}$ et $4{,}97 \times 10^{-4}\,\mathrm{mol}$, ce qui reste cohérent avec l'énoncé.)

5) Calcium de l'échantillon. Chaque ion calcium fixé libère deux ions oxonium et tous les ions

calcium sont retenus, donc

$$n_1(\mathrm{Ca^{2+}}) = \frac{n(\mathrm{H_3O^+})}{2} = \frac{4{,}92\times10^{-4}\,\mathrm{mol}}{2} = 2{,}46\times10^{-4}\,\mathrm{mol} \quad \text{dans } V_1 = 20{,}0\,\mathrm{mL}$$

Calcium du comprimé. Tout le calcium du comprimé se trouve dans les $500{,}0\,\mathrm{mL}$ de S ; le prélèvement en représente $\dfrac{20{,}0}{500{,}0} = \dfrac{1}{25}$:

$$n(\mathrm{Ca^{2+}}) = n_1 \times \frac{V}{V_1} = 2{,}46\times10^{-4}\,\mathrm{mol}\times 25 = 6{,}15\times10^{-3}\,\mathrm{mol}$$

$$m = n(\mathrm{Ca^{2+}})\times M(\mathrm{Ca}) = 6{,}15\times10^{-3}\,\mathrm{mol}\times 40{,}1\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}} = 0{,}247\,\mathrm{g} \approx 247\,\mathrm{mg}$$

Besoin à couvrir. $950\,\mathrm{mg} - 400\,\mathrm{mg} = 550\,\mathrm{mg}$ par jour.

Nombre de comprimés. $N = \dfrac{550\,\mathrm{mg}}{247\,\mathrm{mg}} \approx 2{,}2$: deux comprimés ne suffisent pas ($494\,\mathrm{mg}$), il en faut un troisième.

$$\boxed{N = 3 \text{ comprimés par jour}}$$

Commentaire. Trois comprimés apportent environ $740\,\mathrm{mg}$, un peu plus que le manque à combler ; la prise est contraignante sur la durée. Pour la réduire, on peut enrichir l'alimentation : avec un laitage de plus par jour (un yaourt apporte de l'ordre de $150\,\mathrm{mg}$ de calcium) ou une eau minérale riche en calcium, deux comprimés suffiraient ; on peut aussi prescrire des comprimés plus fortement dosés.

6) **a.** Incertitude-type sur la moyenne des huit mesures :

$$u(m) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}234\,\mathrm{mg}}{\sqrt{8}} = 0{,}790\,\mathrm{mg} \approx 0{,}8\,\mathrm{mg}$$

On n'en garde qu'un chiffre significatif, arrondi vers le haut ; la moyenne est arrondie au même rang (le dixième de milligramme) :

$$\boxed{m = (246{,}9 \pm 0{,}8)\,\mathrm{mg}}$$

b. Écart normalisé à la valeur de la notice :

$$z = \frac{|m_{\mathrm{moy}} - m_{\mathrm{réf}}|}{u(m)} = \frac{|246{,}9\,\mathrm{mg} - 250\,\mathrm{mg}|}{0{,}8\,\mathrm{mg}} \approx \boxed{3{,}9}$$

$z > 2$: le résultat **n'est pas compatible** avec les $250\,\mathrm{mg}$ annoncés. Les huit valeurs sont d'ailleurs toutes inférieures à $250\,\mathrm{mg}$: l'écart vient d'une erreur systématique plutôt que du hasard. Raisons possibles : une petite partie des ions calcium n'est pas retenue par la résine ; des ions oxonium restent dans la colonne faute d'un rinçage suffisant ; la concentration réelle de la solution titrante est un peu supérieure à la valeur indiquée ; ou la teneur réelle du comprimé s'écarte de la valeur nominale, dans la tolérance de fabrication.

7) Une base forte réagit totalement avec l'eau ; la soude apporte des ions $\mathrm{HO^-}$, dont la concentration dans la burette est donc égale à C_B : $[\mathrm{HO^-}] = C_\mathrm{B}$. Avec le produit ionique de l'eau,

$[\mathrm{H_3O^+}] = \dfrac{K_\mathrm{e}}{[\mathrm{HO^-}]}$ (concentrations rapportées à $c^\circ = 1\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}$), d'où

$$\mathrm{pH} = -\log\frac{K_\mathrm{e}}{C_\mathrm{B}} = -\log\frac{1{,}0\times10^{-14}}{2{,}40\times10^{-2}} \approx \boxed{12{,}4}$$

Cohérent avec la courbe : le pH du mélange en fin de titrage (moins de 11,5 à $30\,\mathrm{mL}$) reste inférieur à celui de la solution titrante pure.

8) Prenons $V_\mathrm{c} = 1{,}00\,\mathrm{L}$ de solution commerciale.

- La densité donne la masse volumique : $\rho = d \times \rho_\mathrm{eau} = 1{,}43 \times 1{,}00\,\mathrm{kg{\cdot}L^{-1}} = 1{,}43\,\mathrm{kg{\cdot}L^{-1}}$; un litre pèse donc $m_\mathrm{c} = \rho\, V_\mathrm{c} = 1\,430\,\mathrm{g}$.
- Les $40\,\%$ de cette masse sont de l'hydroxyde de sodium : $m = 0{,}40 \times 1\,430\,\mathrm{g} = 572\,\mathrm{g}$.
- Ce qui représente $n = \dfrac{m}{M(\mathrm{NaOH})} = \dfrac{572\,\mathrm{g}}{40{,}0\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}} = 14{,}3\,\mathrm{mol}$ dans un litre.

$$C_\mathrm{c} = \frac{n}{V_\mathrm{c}} = \frac{14{,}3\,\mathrm{mol}}{1{,}00\,\mathrm{L}} \approx \boxed{14\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}}$$

Le pourcentage massique n'ayant que deux chiffres significatifs, on en garde deux.

Expression générale : $C_\mathrm{c} = \dfrac{w\, d\, \rho_\mathrm{eau}}{M(\mathrm{NaOH})}$, où $w = 0{,}40$ est la fraction massique.