Calculatrice autorisée

Exercice 1 : Cartographier la gravité de la Lune

9,5 points

Le champ de gravitation de la Lune n'a pas la même valeur partout. Sous certaines grandes plaines sombres, les « mers » lunaires, des roches plus denses que leur entourage forment des excès de masse enfouis, appelés *mascons* (de l'anglais *mass concentrations*). Pour en établir la carte, on place deux sondes identiques sur une même orbite basse : l'une précède l'autre et la distance qui les sépare est suivie en permanence avec une précision extrême. Chaque irrégularité du champ survolé modifie un peu cette distance.

Partie A : l'orbite des deux sondes

L'orbite est assimilée à un cercle de centre O, centre de la Lune, décrit à l'altitude $z = 40\,\text{km}$. Son plan contient presque l'axe des pôles lunaires : comme la Lune tourne lentement sur elle-même, les sondes finissent par survoler toute sa surface. Elles restent séparées d'environ $L = 150\,\text{km}$ et bouclent un peu moins de 13 tours de leur orbite en un jour terrestre.

On s'intéresse à l'une des sondes, notée P, de masse m, assimilée à un point. Le référentiel d'étude est le référentiel sélénocentrique (origine au centre de la Lune, axes pointés vers trois étoiles lointaines), supposé galiléen. Le champ de gravitation lunaire est noté $\vec{\mathcal{G}}$.

Données

- constante de la gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$;
- masse de la Lune : $M_\text{L} = 7{,}35 \times 10^{22}\,\text{kg}$; rayon de la Lune : $R_\text{L} = 1\,737\,\text{km}$;
- un jour terrestre dure $24\,\text{h}$.

1) Sur la copie, dessiner sans respecter les échelles la Lune (centre O, rayon R_L), l'orbite et la sonde P placée à l'altitude z. Tracer en P un vecteur unitaire $\vec{u}$ orienté de P vers O.

2) Écrire l'expression vectorielle de la force de gravitation $\vec{F}_{\text{L/P}}$ exercée par la Lune sur la sonde, en fonction de G, m, M_L, R_L, z et $\vec{u}$. Ajouter ce vecteur au dessin de la question 1, sans souci d'échelle.

3) Exprimer le vecteur champ de gravitation lunaire $\vec{\mathcal{G}}$ au point P.

4) La sonde n'est soumise qu'à l'attraction de la Lune. Établir, grâce à la deuxième loi de Newton, l'expression vectorielle de son accélération $\vec{a}$.

5) À l'aide du repère de Frenet, démontrer que, sur une orbite circulaire, la valeur de la vitesse de la sonde ne varie pas.

6) Établir que cette vitesse a pour valeur $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_\text{L}}{R_\text{L} + z}}$.

7) Exprimer, puis calculer, la période de révolution T de la sonde. Retrouve-t-on le nombre de révolutions quotidiennes indiqué en introduction ?

À un instant donné, la seconde sonde arrive au-dessus d'une région où le champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}_2$ n'est plus dirigé vers le centre de la Lune : il penche vers l'avant, dans le sens du mouvement. Au même instant, la sonde de tête survole une région ordinaire, où le champ $\vec{\mathcal{G}}_1$ est centripète (figure 1).

8) En s'appuyant sur la figure 1, prévoir, arguments à l'appui, comment évolue l'écart L qui sépare les sondes : reste-t-il le même, grandit-il ou se réduit-il ?

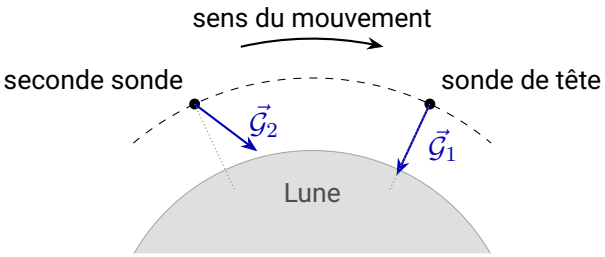

Figure 1 : champs de gravitation au niveau des deux sondes (échelles non respectées ; en pointillés, la direction du centre de la Lune).

Partie B : mesurer la distance par interférométrie

Les changements d'écart entre les sondes sont mesurés par un dispositif interférentiel à laser réparti sur les deux engins : la source, deux lames et le détecteur sont à bord de la sonde de tête, deux miroirs à bord de la seconde sonde (figure 2). La lumière utilisée appartient à l'infrarouge ; sa longueur d'onde dans le vide vaut $\lambda = 1\,550\,\text{nm}$. La lame semi-réfléchissante A partage le faisceau en deux. Le faisceau 1 franchit l'espace qui sépare les sondes, se réfléchit sur les miroirs B et C de la seconde sonde, revient et atteint la lame D. Le faisceau 2 va directement de A à D. Au-delà de D, les deux faisceaux se superposent sur le détecteur. Sur le schéma, $\text{AB} = \text{CD} = L$ et $\text{AD} = \text{BC} = h$.

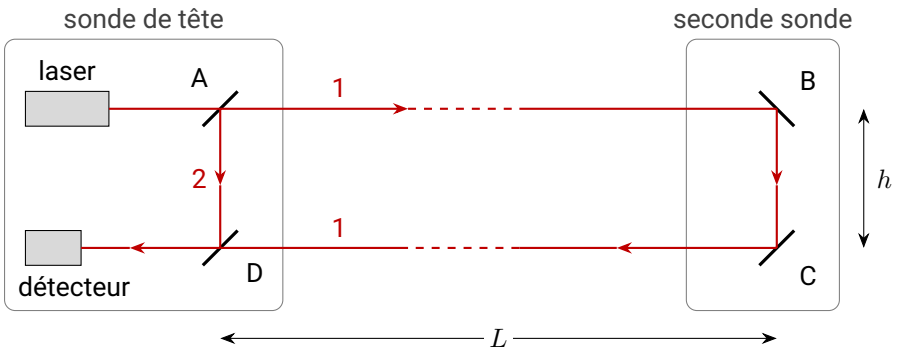

Figure 2 : principe de l'interféromètre (échelles non respectées ; $h = 45{,}0\,\text{cm}$).

9) Expliquer pourquoi les faisceaux 1 et 2 peuvent produire des interférences sur le détecteur.

10) À quelle condition deux ondes qui se superposent donnent-elles une interférence constructive ? Que dire alors de l'amplitude de l'onde résultante ?

11) Exprimer la différence de marche δ entre les faisceaux 1 et 2 à l'aide des longueurs du schéma, puis la simplifier pour l'écrire en fonction de L seulement.

Les sondes se rapprochent : la distance qui les sépare passe de L à $L - d$.

12) Montrer que la différence de marche diminue alors de $2d$.

Le détecteur ne peut repérer, au mieux, que le passage d'une interférence constructive à l'interférence constructive suivante.

13) Établir que la variation de distance qui fait passer d'une interférence constructive à la suivante vaut $\frac{\lambda}{2}$.

14) Calculer la plus petite variation de distance entre les sondes que l'interféromètre peut mesurer, puis la comparer à L.

Exercice 2 : Un complément de calcium

10,5 points

Le calcium est l'élément minéral le plus abondant du corps humain : il constitue l'essentiel de la partie minérale des os et des dents et intervient dans la contraction des muscles. Quand l'alimentation n'en fournit pas assez, un médecin peut prescrire des comprimés qui libèrent en solution des ions calcium $\mathrm{Ca^{2+}(aq)}$. On cherche à déterminer la masse de calcium contenue dans un comprimé, puis le nombre de comprimés à prendre chaque jour.

Données

- masse molaire du calcium : $M(\mathrm{Ca}) = 40{,}1\ \mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$;
- produit ionique de l'eau à $25\,^{\circ}\mathrm{C}$: $K_e = 1{,}0 \times 10^{-14}$.

Étape 1 : échange d'ions sur une résine. Un comprimé est dissous dans de l'eau distillée ; la solution obtenue est transvasée dans une fiole jaugée de $500{,}0\ \mathrm{mL}$, puis amenée au trait avec de l'eau distillée : c'est la solution S. On prélève à la pipette jaugée $V_1 = 20{,}0\ \mathrm{mL}$ de S, que l'on verse au sommet d'une colonne remplie de résine échangeuse d'ions : de petites billes qui portent des ions oxonium $\mathrm{H_3O^+}$ mobiles. En traversant la colonne, chaque ion calcium se fixe sur une bille et y prend la place de deux ions oxonium, entraînés avec le liquide (figure 3). On rince la colonne à l'eau distillée et on recueille tout le liquide sorti, appelé éluat (environ $50\ \mathrm{mL}$). On admet que la résine retient la totalité des ions calcium de l'échantillon.

Étape 2 : titrage des ions oxonium de l'éluat. Quelques gouttes d'indicateur coloré sont ajoutées à l'éluat, que l'on titre avec suivi pH-métrique (figure 4). La burette contient une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium $(\mathrm{Na^+(aq) + HO^-(aq)})$, de concentration $C_B = 2{,}40 \times 10^{-2}\ \mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}$. Les mesures, traitées par un logiciel, donnent la figure 5.

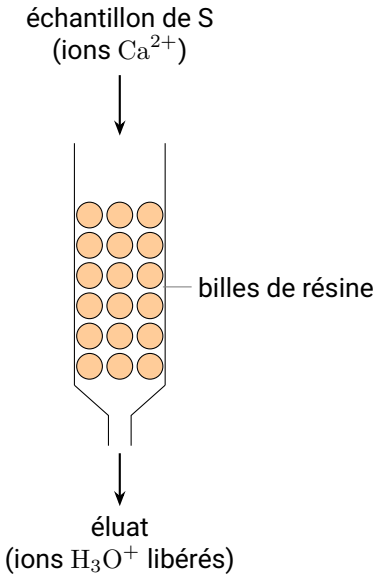

Figure 3 : colonne de résine.

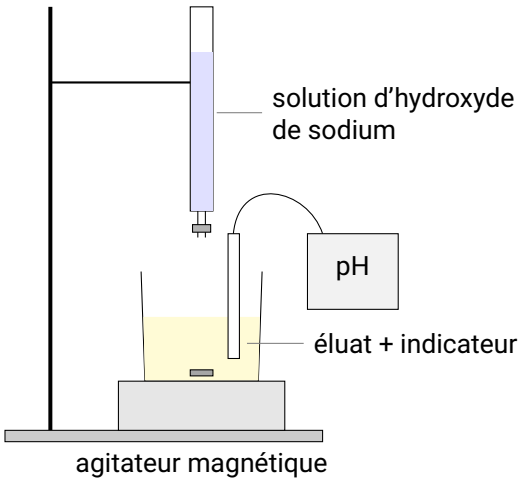

Figure 4 : montage du titrage.

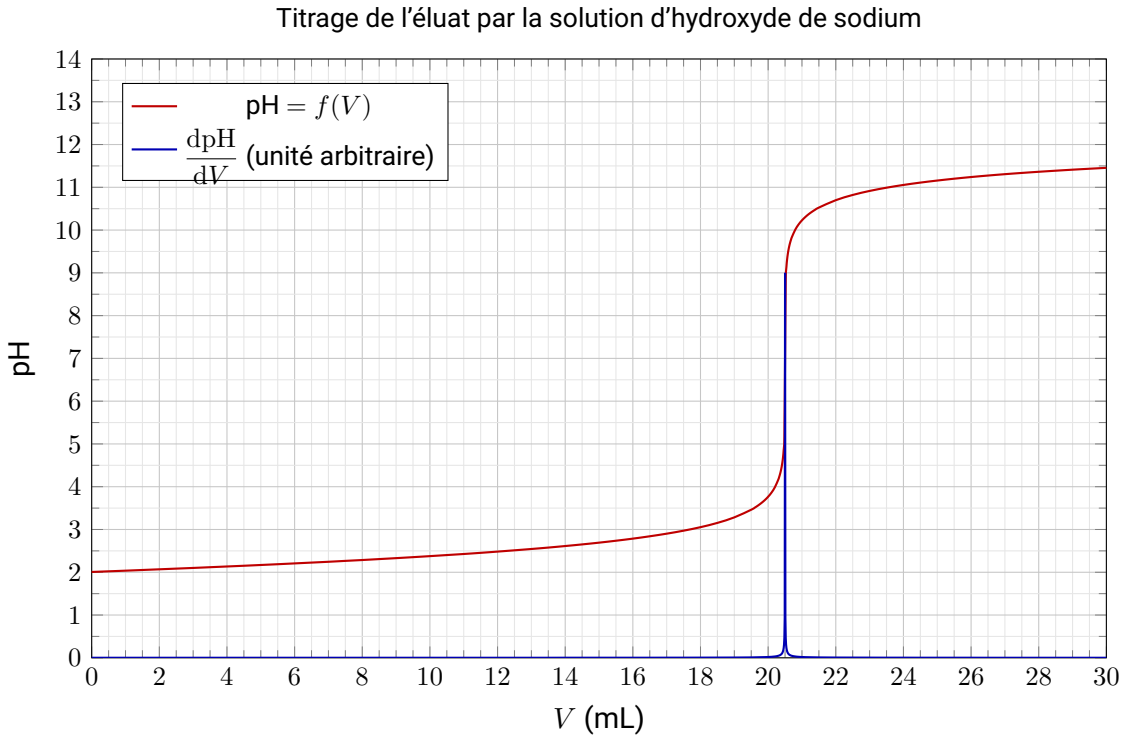

Figure 5 : évolution du pH et de sa dérivée au cours de l'ajout de la solution titrante (V : volume versé).

On a obtenu la solution titrante en diluant une solution $\mathrm{S_0}$ d'hydroxyde de sodium de concentration $C_0 = 2{,}40\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}$. On dispose de fioles jaugées de $100{,}0\,\mathrm{mL}$, $250{,}0\,\mathrm{mL}$ et $500{,}0\,\mathrm{mL}$, et de pipettes jaugées de $5{,}0\,\mathrm{mL}$, $10{,}0\,\mathrm{mL}$ et $20{,}0\,\mathrm{mL}$.

1) Choisir, en le justifiant par un calcul, la fiole jaugée et la pipette jaugée qui permettent de préparer la solution titrante en ne prélevant $\mathrm{S_0}$ qu'une seule fois.

2) Donner l'équation de la réaction sur laquelle repose ce titrage. Définir l'équivalence.

Indicateur coloré	Zone de virage	Couleur en milieu acide	Couleur en milieu basique
Violet de méthyle	$0{,}0 < \mathrm{pH} < 1{,}6$	jaune	violet
Bleu de bromothymol	$6{,}0 < \mathrm{pH} < 7{,}6$	jaune	bleu
Carmin d'indigo	$11{,}6 < \mathrm{pH} < 14{,}0$	bleu	jaune

3) Déterminer sur la figure 5 le volume versé à l'équivalence V_E et le pH à l'équivalence. Dire ensuite, en argumentant, quel indicateur du tableau signalerait l'équivalence par un changement de teinte.

4) Montrer que l'éluat contenait environ $4{,}9 \times 10^{-4}\,\mathrm{mol}$ d'ions oxonium.

5) **Résolution de problème.** *Cette question est ouverte : toute piste de recherche, même non aboutie, sera valorisée, à condition d'être clairement exposée, hypothèses comprises.*

L'apport en calcium conseillé pour un adulte de plus de 25 ans est d'environ $950\,\mathrm{mg}$ par jour. Un patient dont l'alimentation ne lui en fournit que $400\,\mathrm{mg}$ par jour doit compléter avec ces comprimés. Combien doit-il en prendre chaque jour ? Commenter la valeur obtenue et suggérer une façon de diminuer le nombre de comprimés.

Le titrage a été répété huit fois dans les mêmes conditions ; m désigne la masse de calcium d'un comprimé déduite de chaque titrage. Un tableur a donné :

Titrage n°	1	2	3	4	5	6	7	8
m (mg)	244,6	249,3	246,8	243,9	248,5	247,2	249,9	245,1
Moyenne : 246,9125				Écart type : 2,2344303				

Données

- Quand une grandeur X est mesurée n fois de façon indépendante, avec un écart type σ_{n-1}, l'incertitude-type associée à la valeur moyenne vaut $u(X) = \dfrac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$.
- Le résultat s'écrit $X = X_{\text{moy}} \pm u(X)$, en ne gardant qu'un chiffre significatif pour $u(X)$, arrondi vers le haut.
- Une valeur mesurée est compatible avec une valeur de référence $X_{\text{réf}}$ si $\dfrac{|X_{\text{moy}} - X_{\text{réf}}|}{u(X)} \leqslant 2$.

6) **a.** Écrire le résultat de la mesure de la masse m de calcium d'un comprimé sous la forme $m = m_{\text{moy}} \pm u(m)$.

b. La notice annonce $250\,\text{mg}$ de calcium par comprimé. Le résultat est-il compatible avec cette indication ? Proposer une raison possible de l'écart.

7) L'hydroxyde de sodium est une base forte. Que signifie ce terme ? Calculer le pH de la solution titrante contenue dans la burette.

8) La solution S_0 provient d'une solution commerciale corrosive, de densité $1{,}43$, dont $40\,\%$ de la masse est de l'hydroxyde de sodium NaOH. Combien de moles de NaOH un litre de cette solution commerciale contient-il ? En déduire sa concentration en soluté apporté. Toute démarche cohérente sera acceptée.

Données : eau liquide, $\rho_{\text{eau}} = 1{,}00\,\text{kg·L}^{-1}$; $M(\text{NaOH}) = 40{,}0\,\text{g·mol}^{-1}$.