Exercice 1 : Refroidir une bouteille de vin

10 points

1) Le premier principe de la thermodynamique appliqué au système {vin + bouteille} s'écrit, entre deux états :

$$\Delta E_{\mathrm{m}} + \Delta U = W + Q$$

- le système est immobile (au repos à la même altitude) : son énergie mécanique ne varie pas, $\Delta E_{\mathrm{m}} = 0$;
- le système n'échange aucun travail avec l'air de la cave (pas de force qui se déplace, système incompressible) : $W = 0$.

Il reste donc :

$$\boxed{\Delta U = Q}$$

2) Le flux thermique est le transfert thermique par unité de temps. Pendant une durée très petite Δt où Φ est supposé constant :

$$\boxed{Q = \Phi \times \Delta t}$$

avec Q en joules (J), Φ en watts (W) et Δt en secondes (s).

3) Pour un système incompressible de capacité thermique C dont la température varie de ΔT : $\Delta U = C \times \Delta T$. Avec les questions 1 et 2 : $C\,\Delta T = Q = \Phi\,\Delta t$, d'où

$$\boxed{\Phi = C \times \frac{\Delta T}{\Delta t}}$$

4) D'après la loi de Newton, avec ici $T_{\mathrm{a}} = T_{\mathrm{air}}$: $\Phi = -hS\,(T - T_{\mathrm{air}})$. En égalant avec l'expression de la question 3 :

$$C\,\frac{\Delta T}{\Delta t} = -hS\,(T - T_{\mathrm{air}}) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\Delta T}{\Delta t} = -\frac{hS}{C}\,(T - T_{\mathrm{air}})$$

Quand Δt tend vers 0, le taux de variation $\dfrac{\Delta T}{\Delta t}$ tend vers la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{hS}{C}\,(T - T_{\mathrm{air}})$$

C'est l'équation demandée, à condition que $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{hS}{C}$, soit :

$$\boxed{\tau = \frac{C}{h \times S}}$$

5) **Par les unités.** C s'exprime en $\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$, h en $\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-1}}$ et S en $\mathrm{m^2}$, donc hS s'exprime en $\mathrm{W{\cdot}K^{-1}}$. Ainsi $\tau = \dfrac{C}{hS}$ s'exprime en $\dfrac{\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}}{\mathrm{W{\cdot}K^{-1}}} = \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{W}}$. Or $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}}$, donc $\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{W}} = \mathrm{s}$: τ est homogène à une durée.

Autre méthode (analyse dimensionnelle) : dans l'équation différentielle, $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ est homogène à une température divisée par une durée, et $(T - T_{\mathrm{air}})$ à une température ; pour que $\dfrac{1}{\tau}(T - T_{\mathrm{air}})$ ait la même dimension, τ doit être homogène à une durée.

6) On convertit $C = 3{,}60\,\text{kJ·K}^{-1} = 3{,}60 \times 10^3\,\text{J·K}^{-1}$:

$$\tau = \frac{C}{hS} = \frac{3{,}60 \times 10^3}{12 \times 5{,}0 \times 10^{-2}} = 6\,000\,\text{s}, \quad \text{soit} \quad \boxed{\tau = 6{,}0 \times 10^3\,\text{s}}\ (\text{environ } 1{,}7\,\text{h})$$

7) L'équation $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\,T + \dfrac{T_{\text{air}}}{\tau}$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -\dfrac{1}{\tau}$ et $b = \dfrac{T_{\text{air}}}{\tau}$. Ses solutions sont les fonctions $y = K\,\mathrm{e}^{at} - \dfrac{b}{a}$, avec $-\dfrac{b}{a} = \dfrac{T_{\text{air}}}{\tau} \times \tau = T_{\text{air}}$:

$$T(t) = K\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + T_{\text{air}}, \quad K \text{ constante.}$$

Condition initiale : $T(0) = K\,\mathrm{e}^0 + T_{\text{air}} = K + T_{\text{air}}$ et $T(0) = T_0$, donc $K = T_0 - T_{\text{air}}$. On obtient bien :

$$\boxed{T(t) = (T_0 - T_{\text{air}})\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + T_{\text{air}}}$$

On pouvait aussi vérifier que cette fonction convient : $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}(T_0 - T_{\text{air}})\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = -\dfrac{1}{\tau}\,(T - T_{\text{air}})$, et $T(0) = T_0$.

8) On note $T_{\text{s}} = 16\,^\circ\text{C}$ la température de service et t_{s} la date où elle est atteinte :

$$T_{\text{s}} - T_{\text{air}} = (T_0 - T_{\text{air}})\,\mathrm{e}^{-t_{\text{s}}/\tau} \iff \mathrm{e}^{-t_{\text{s}}/\tau} = \frac{T_{\text{s}} - T_{\text{air}}}{T_0 - T_{\text{air}}} \iff t_{\text{s}} = \tau \ln\left(\frac{T_0 - T_{\text{air}}}{T_{\text{s}} - T_{\text{air}}}\right)$$

Seules des différences de températures interviennent : on peut les calculer en degrés Celsius (un écart de $1\,^\circ\text{C}$ vaut un écart de $1\,\text{K}$).

$$t_{\text{s}} = 6{,}0 \times 10^3 \times \ln\left(\frac{24 - 12}{16 - 12}\right) = 6{,}0 \times 10^3 \times \ln 3 \approx 6\,592\,\text{s}, \quad \text{soit} \quad \boxed{t_{\text{s}} \approx 6{,}6 \times 10^3\,\text{s}}$$

Le vin peut être servi au bout d'environ 1 h 50 min.

9) On considère que le régime permanent est atteint au bout de 5τ :

$$5\tau = 5 \times 6{,}0 \times 10^3, \quad \text{soit} \quad \boxed{5\tau = 3{,}0 \times 10^4\,\text{s}}\ (\text{environ 8 h 20 min})$$

Justification : $T(5\tau) - T_{\text{air}} = (T_0 - T_{\text{air}})\,\mathrm{e}^{-5} = 12 \times 6{,}7 \times 10^{-3} \approx 0{,}08\,\text{K}$; l'écart restant est inférieur à 1 % de l'écart initial et n'est plus mesurable avec un thermomètre usuel.

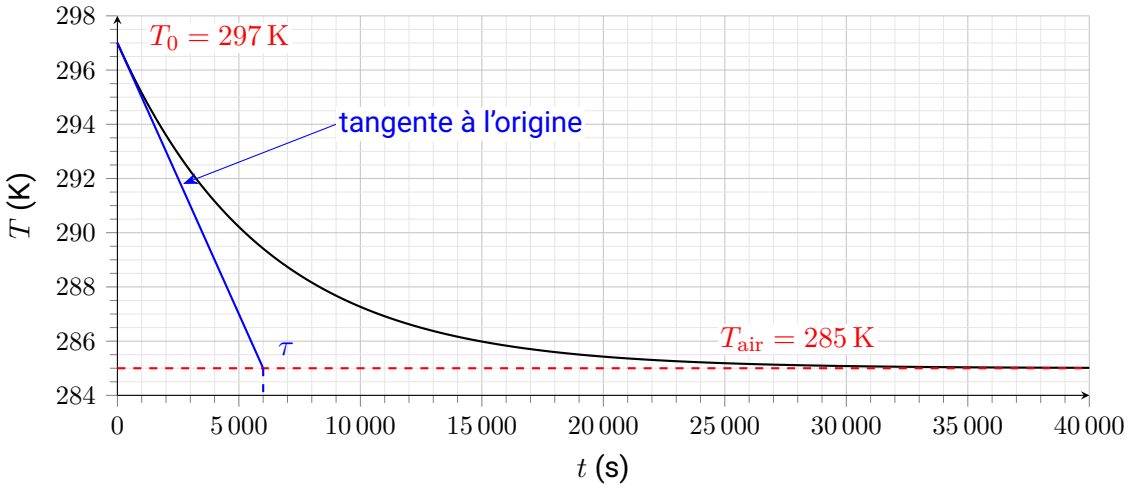
10) Sans ventilation, l'air au contact de la bouteille n'est plus renouvelé : les échanges par convection sont moins efficaces et le coefficient d'échange convectif h **diminue**. S (géométrie de la bouteille) et C (nature et masse du système) ne changent pas.

Conséquence : $\tau = \dfrac{C}{hS}$ augmente, le refroidissement est plus lent.

11) Lecture graphique (tracés ci-dessous) :

- T_0 est l'ordonnée du point de départ de la courbe, à $t = 0$: $T_0 = 297\,\text{K}$, soit $297 - 273 = 24\,^\circ\text{C}$;
- T_{air} est la valeur limite vers laquelle tend T (asymptote horizontale) : $T_{\text{air}} = 285\,\text{K}$, soit $12\,^\circ\text{C}$;
- la tangente à la courbe à l'origine coupe l'asymptote $T = T_{\text{air}}$ à la date $t = \tau$: $\tau \approx 6{,}0 \times 10^3\,\text{s}$.

Ces trois valeurs sont en accord avec les données et avec le calcul de la question 6. *Autre méthode pour* τ : à $t = \tau$, l'écart $T - T_{\text{air}}$ vaut 37 % de l'écart initial, soit $T(\tau) = 285 + 0{,}37 \times 12 \approx 289{,}4\,\text{K}$.



Exercice 2 : Une pompe à chaleur pour chauffer une piscine

10 points

Partie A : fonctionnement global de la pompe à chaleur

1) Sur la figure 1, une flèche orientée vers le fluide indique une énergie qu'il gagne, une flèche qui en part une énergie qu'il perd :

- énergies **reçues** par le fluide : Q_{f}, venue de l'air extérieur, et W_{e}, fournie par le réseau électrique ;
- énergie **cédée** par le fluide : Q_{c}, donnée à l'eau du bassin.

2) Premier principe appliqué au fluide, immobile à l'échelle macroscopique ($\Delta E_{\text{m}} = 0$), sur un cycle : $\Delta U_{\text{cycle}} = W + Q$, où W et Q sont les énergies *algébriques* reçues par le fluide (positives si reçues, négatives si cédées).

Les grandeurs de l'énoncé étant toutes positives, le fluide reçoit $+W_{\text{e}}$, $+Q_{\text{f}}$ et $-Q_{\text{c}}$ (énergie cédée). Après un cycle, le fluide revient dans le même état : $\Delta U_{\text{cycle}} = 0$. Donc

$$0 = W_{\text{e}} + Q_{\text{f}} - Q_{\text{c}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{Q_{\text{c}} = Q_{\text{f}} + W_{\text{e}}}$$

Sur un cycle, l'énergie cédée à l'eau est égale à la somme des énergies reçues.

Partie B : étude du fluide frigorigène

3) La figure 2 indique « liquide basse pression » avant le vaporisateur et « vapeur basse pression » après : dans le vaporisateur, le fluide change d'état, du liquide vers le gaz. Ce passage s'appelle une vaporisation (ici une ébullition).

Pour séparer les molécules d'un liquide et le faire passer à l'état gazeux, il faut fournir de l'énergie (transformation endothermique) : le fluide **reçoit** donc de l'énergie. Elle provient de l'air extérieur, c'est le transfert Q_f ; c'est pourquoi l'air sort du vaporisateur refroidi.

4) Un transfert thermique peut se faire par **conduction**, par **convection** ou par **rayonnement**.

L'air et le fluide sont séparés par le métal des tuyaux. Pour passer de l'un à l'autre, l'énergie doit traverser ce solide, où elle se propage par contact entre particules voisines, sans mouvement d'ensemble de la matière : le mode principal est la conduction.

On accepte aussi la convection si elle est justifiée par la circulation de l'air extérieur le long des tuyaux ; le rayonnement est négligeable.

Partie C : chauffage de l'eau du bassin d'une piscine

5) Masse d'eau : $m_\text{eau} = \rho_\text{eau} \times V = 1{,}00 \times 10^3 \times 480 = 4{,}80 \times 10^5\ \text{kg}$.

L'eau liquide est un système incompressible :

$$\Delta U_\text{eau} = m_\text{eau}\, c_\text{eau}\, (\theta_\text{f} - \theta_\text{i}) = \rho_\text{eau} V c_\text{eau}\, (\theta_\text{f} - \theta_\text{i})$$

$\Delta U_\text{eau} = 1{,}00 \times 10^3 \times 480 \times 4{,}18 \times 10^3 \times (27 - 16) \approx 2{,}207 \times 10^{10}\ \text{J}$, soit $\boxed{\Delta U_\text{eau} \approx 2{,}2 \times 10^{10}\ \text{J}}$

(l'écart de température se calcule indifféremment en °C ou en K).

L'eau ne reçoit que le transfert thermique Q_c (pas de travail, pas de déperdition) ; le premier principe appliqué à l'eau donne $\Delta U_\text{eau} = Q_\text{c}$, donc

$$\boxed{Q_\text{c} \approx 2{,}2 \times 10^{10}\ \text{J}}$$

6) D'après la question 2 : $Q_\text{f} = Q_\text{c} - W_\text{e}$. On garde la valeur non arrondie de Q_c :

$$Q_\text{f} = 2{,}207 \times 10^{10} - 6{,}0 \times 10^9 \approx 1{,}607 \times 10^{10}\ \text{J}, \quad \text{soit} \quad \boxed{Q_\text{f} \approx 1{,}6 \times 10^{10}\ \text{J}}$$

L'air extérieur a fourni gratuitement près des trois quarts de l'énergie reçue par l'eau.

7) Le coefficient de performance est le rapport de l'énergie utile (celle reçue par l'eau, Q_c) à l'énergie consommée (l'énergie électrique W_e) :

$$\eta = \frac{Q_\text{c}}{W_\text{e}} = \frac{2{,}207 \times 10^{10}}{6{,}0 \times 10^9} \approx 3{,}68, \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta \approx 3{,}7}$$

(calcul fait avec la valeur non arrondie de Q_c). Cette valeur est bien comprise entre 2,5 et 5, comme l'indique le texte : l'eau reçoit environ 3,7 fois l'énergie électrique consommée par la PAC.

Partie D : étude du gaz frigorigène, le 1,1,1,2-tétrafluoroéthane

8) Équation d'état du gaz parfait : $PV = nRT$, d'où $n = \dfrac{PV}{RT}$, avec les grandeurs en unités SI :

- $P = 3{,}0 \times 10^5\ \text{Pa}$;

- $V = 200\,\text{mL} = 0{,}200\,\text{L} = 2{,}00 \times 10^{-4}\,\text{m}^3$;
- $T = 40 + 273 = 313\,\text{K}$.

D'où :

$$n = \frac{3{,}0 \times 10^5 \times 2{,}00 \times 10^{-4}}{8{,}314 \times 313} \approx 2{,}306 \times 10^{-2}\,\text{mol}, \quad \text{soit} \quad \boxed{n \approx 2{,}3 \times 10^{-2}\,\text{mol}}$$

9) La température d'un gaz est liée à l'agitation de ses molécules : une augmentation de la température correspond à une **agitation thermique plus grande**, c'est-à-dire à une augmentation de l'énergie cinétique moyenne (vitesse moyenne) des molécules du gaz.

10) **Non**, le modèle du gaz parfait ne s'applique plus.

- **Explication macroscopique** : le modèle du gaz parfait n'est valable qu'aux faibles pressions (en pratique, au-dessous de $10^6\,\text{Pa}$ environ). Ici $P = 30\,\text{bar} = 3{,}0 \times 10^6\,\text{Pa}$, dix fois la pression de la question 8. De plus, sous cette pression, le fluide est proche de sa liquéfaction (elle se produit vers $86\,^\circ\text{C}$ sous $30\,\text{bar}$) : la figure 2 montre d'ailleurs qu'il se liquéfie dans le condenseur, à haute pression.
- **Explication microscopique** : le modèle du gaz parfait suppose des molécules très éloignées les unes des autres, sans interaction entre elles en dehors des chocs, et de volume propre négligeable. À haute pression, les molécules sont beaucoup plus proches : les interactions entre elles ne sont plus négligeables.