Exercice 1 : Un minerai radioactif

9 points

1) Un noyau radioactif est un noyau **instable** qui se désintègre spontanément, de façon aléatoire, en un noyau plus stable, en émettant une particule (et souvent un rayonnement γ).

2) **a.** Des noyaux **isotopes** ont le même nombre de protons Z mais des nombres de neutrons différents, donc des nombres de nucléons A différents.

b. Les deux noyaux contiennent $Z = 92$ protons. Le nombre de neutrons est $N = A - Z$:

$$\text{uranium 235 : } N = 235 - 92 = \boxed{143 \text{ neutrons}}$$
$$\text{uranium 238 : } N = 238 - 92 = \boxed{146 \text{ neutrons}}$$

L'uranium 238 a trois neutrons de plus que l'uranium 235.

3) **a.** Lors d'une désintégration, il y a **conservation du nombre de nucléons** A et **conservation du nombre de charge** Z (lois de Soddy).

b. Le noyau d'uranium 238 donne un noyau de thorium 234 et une particule ${}^{A}_{Z}\text{X}$. Conservation de A : $238 = 234 + A$, d'où $A = 4$; conservation de Z : $92 = 90 + Z$, d'où $Z = 2$. La particule est un noyau d'hélium 4 :

$$\boxed{{}^{238}_{92}\text{U} \longrightarrow {}^{234}_{90}\text{Th} + {}^{4}_{2}\text{He}}$$

Une particule α (noyau ${}^{4}_{2}\text{He}$) est émise : c'est une radioactivité de type $\boxed{\alpha}$.

c. Conservation de A : $234 = 234 + A$, d'où $A = 0$; conservation de Z : $90 = 91 + Z$, d'où $Z = -1$:

$$\boxed{{}^{234}_{90}\text{Th} \longrightarrow {}^{234}_{91}\text{Pa} + {}^{0}_{-1}\text{e}}$$

La particule émise est un **électron** : c'est une radioactivité β^-.

4) **a.** L'équation $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$ est de la forme $y' = ay$ avec $a = -\lambda$. Ses solutions sont les fonctions $N(t) = K\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$, où K est une constante.

Condition initiale : $N(0) = K\,\mathrm{e}^{0} = K$ et $N(0) = N_0$, donc $K = N_0$. Loi de décroissance radioactive :

$$\boxed{N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}$$

b. Le temps de demi-vie $t_{1/2}$ est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux radioactifs initialement présents dans l'échantillon se sont désintégrés.

c. À la date $t_{1/2}$, $N(t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{2}$, donc :

$$N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{N_0}{2} \iff \mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \iff -\lambda t_{1/2} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \iff \boxed{t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

d. $\lambda = \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}}$.

$$\lambda = \frac{\ln 2}{4{,}5 \times 10^9 \text{ ans}} \approx \boxed{1{,}5 \times 10^{-10} \text{ an}^{-1}}$$

Avec 1 an $= 365{,}25 \times 24 \times 3600$ s $\approx 3{,}156 \times 10^7$ s :

$$\lambda = \frac{\ln 2}{4{,}5 \times 10^9 \times 365{,}25 \times 24 \times 3600 \text{ s}} \approx \boxed{4{,}9 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}}$$

5) **a.** L'activité A d'un échantillon radioactif est le nombre moyen de désintégrations par seconde. Elle s'exprime en **becquerels** (Bq) : 1 Bq = une désintégration par seconde.

b. $A_0 = \lambda N_0$, donc $N_0 = \dfrac{A_0}{\lambda}$, avec λ en s^{-1} puisque A_0 est en désintégrations par seconde. On garde la valeur non arrondie de λ :

$$N_0 = \frac{1{,}2 \times 10^4 \text{ Bq}}{4{,}88 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}} \approx \boxed{2{,}5 \times 10^{21} \text{ noyaux}}$$

c. $A(t) = A_0 \, \text{e}^{-\lambda t}$ avec $t = 10\,000$ ans : on prend λ en an^{-1} pour que λt soit sans unité.

$$A = 1{,}2 \times 10^4 \text{ Bq} \times \text{e}^{-1{,}54 \times 10^{-10} \times 10\,000} = 1{,}2 \times 10^4 \text{ Bq} \times \text{e}^{-1{,}54 \times 10^{-6}} \approx \boxed{1{,}2 \times 10^4 \text{ Bq}}$$

Commentaire : l'activité n'a pas changé de façon mesurable en dix mille ans. C'est normal : $10\,000$ ans est une durée négligeable devant le temps de demi-vie de l'uranium 238 (4,5 milliards d'années). La pierre restera radioactive à l'échelle de toute vie humaine.

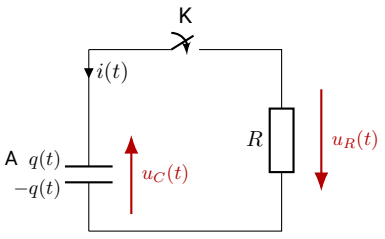
d. Les désintégrations émettent des particules (α, β) et des rayonnements γ **ionisants** : ils arrachent des électrons aux molécules des tissus vivants et peuvent endommager l'ADN des cellules. Une exposition prolongée cumule ces effets, d'autant plus si l'on inhale ou ingère des poussières de la pierre. Risques : risque accru de **cancers** (poumon par inhalation de poussières ou du radon, descendant de l'uranium), leucémies, mutations génétiques.

Exercice 2 : Des supercondensateurs pour un bus électrique

11 points

Partie A : modélisation de la décharge du condensateur totem

1) En convention récepteur, la flèche de tension d'un dipôle est orientée dans le sens **opposé** à celui du courant qui le traverse. Le courant i entre dans le condensateur par l'armature A (vers le bas) : la flèche de u_C est dirigée vers A (vers le haut). Dans le conducteur ohmique, i circule vers le haut : la flèche de u_R est dirigée vers le bas.



2) L'intensité du courant électrique est le **débit de charges électriques** : la charge qui traverse une

section du conducteur par unité de temps. Le courant i arrive sur l'armature A, de charge q :

$$\boxed{i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}$$

3) Pour un condensateur, $q(t) = C\,u_C(t)$. Comme C est une constante :

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}(C\,u_C)}{\mathrm{d}t} \quad \text{donc} \quad \boxed{i(t) = C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}}$$

4) *Loi des mailles* : en parcourant la maille dans le sens horaire, les flèches de u_C et de u_R sont toutes deux orientées dans le sens du parcours, donc $u_C(t) + u_R(t) = 0$.

Loi d'Ohm (convention récepteur) : $u_R(t) = R\,i(t) = RC\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ d'après la question 3).

En remplaçant :

$$RC\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = 0 \iff \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}\,u_C(t) = 0$$

C'est la forme demandée, avec $\boxed{\tau = RC}$.

5) Analyse dimensionnelle : d'après la loi d'Ohm, $[R] = \dfrac{[U]}{[I]}$; d'après $q = C\,u_C$ et $q = I\,\Delta t$ (courant constant), $[C] = \dfrac{[I]\,[T]}{[U]}$. Donc :

$$[\tau] = [R]\,[C] = \frac{[U]}{[I]} \times \frac{[I]\,[T]}{[U]} = [T]$$

$\tau = RC$ a la dimension d'une durée : il s'exprime en secondes ($\Omega \times \mathrm{F} = \mathrm{s}$).

6) L'équation $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\,u_C$ est de la forme $y' = ay$ avec $a = -\dfrac{1}{\tau}$. Ses solutions sont $u_C(t) = K\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, K constante.

Condition initiale : le condensateur est chargé sous la tension E, donc $u_C(0) = E$. Or $u_C(0) = K\,\mathrm{e}^{0} = K$, d'où $K = E$:

$$\boxed{u_C(t) = E\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

7) À $t = 5\tau$: $u_C(5\tau) = E\,\mathrm{e}^{-5} \approx 0{,}0067\,E$, soit moins de $1\,\%$ de la tension initiale ($\approx 5\,\mathrm{V}$ sur $800\,\mathrm{V}$). On peut considérer que le condensateur totem est **déchargé**.

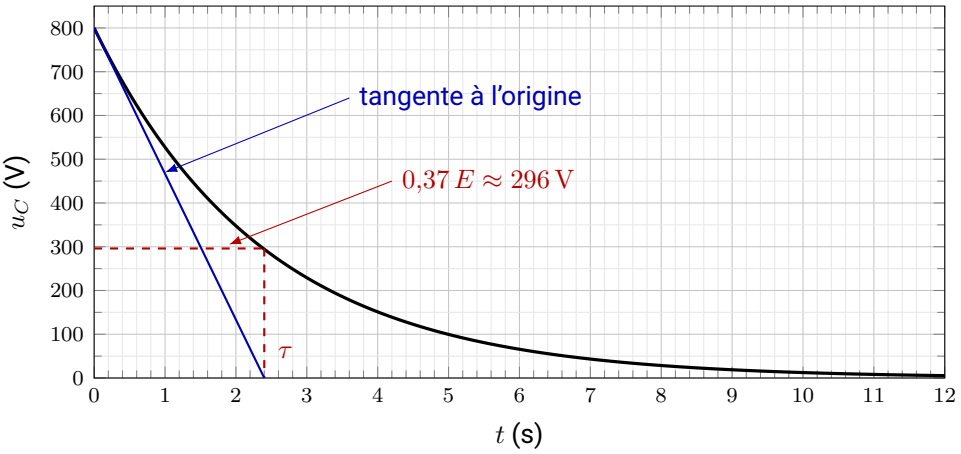
8) Le biberonnage dure environ $12\,\mathrm{s}$: il faut $5\tau = 12\,\mathrm{s}$, soit $\tau = 2{,}4\,\mathrm{s}$. Comme $\tau = RC$:

$$R = \frac{\tau}{C} = \frac{2{,}4\,\mathrm{s}}{30\,\mathrm{F}} = \boxed{0{,}080\,\Omega}$$

Partie B : étude expérimentale de la décharge

9) *Méthode des 37 %* : à $t = \tau$, $u_C(\tau) = E\,\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37\,E = 0{,}37 \times 800\,\mathrm{V} \approx 296\,\mathrm{V}$. On trace la droite horizontale $u_C = 296\,\mathrm{V}$: elle coupe la courbe au point d'abscisse τ.

Variante : la tangente à la courbe à l'origine coupe l'axe des temps ($u_C = 0$) à la date $t = \tau$.



On lit $\boxed{\tau \approx 2{,}4\,\mathrm{s}}$, ce qui est cohérent avec la valeur imposée à la question 8) : la résistance du circuit vaut bien $R = \dfrac{\tau}{C} = 0{,}080\,\Omega$.

10) *Méthode 1 (loi des mailles à $t = 0$)* : à $t = 0$, $u_C(0) = E$ et $u_R(0) = -u_C(0) = -E$, donc $R\,i(0) = -E$. L'intensité est maximale en valeur absolue au début de la décharge :

$$I_{\max} = \frac{E}{R} = \frac{800\,\mathrm{V}}{0{,}080\,\Omega} = \boxed{1{,}0 \times 10^4\,\mathrm{A}}$$

(le signe « $-$ » de $i(0)$ indique que, pendant la décharge, le courant circule dans le sens opposé à la flèche de i).

Méthode 2 (par la pente) : $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$; à $t = 0$, la pente de la tangente vaut $\dfrac{0 - 800\,\mathrm{V}}{2{,}4\,\mathrm{s}}$, d'où $|i(0)| = 30\,\mathrm{F} \times \dfrac{800\,\mathrm{V}}{2{,}4\,\mathrm{s}} = 1{,}0 \times 10^4\,\mathrm{A}$.

Commentaire : $10\,000$ ampères, c'est bien « plusieurs milliers d'ampères en début de transfert », comme l'annonce le texte. D'où l'exigence de sécurité du biberonnage.

11) Énergie à fournir pour charger complètement le condensateur totem sous la tension E :

$$W = \frac{1}{2}\,C\,E^2 = \frac{1}{2} \times 30\,\mathrm{F} \times (800\,\mathrm{V})^2 = 9{,}6 \times 10^6\,\mathrm{J}$$

La puissance étant constante, $W = P\,\Delta t$, donc :

$$\Delta t = \frac{W}{P} = \frac{C\,E^2}{2P} = \frac{9{,}6 \times 10^6\,\mathrm{J}}{12 \times 10^3\,\mathrm{W}} = \boxed{8{,}0 \times 10^2\,\mathrm{s}}$$

soit environ **13 minutes** (13 min 20 s). La recharge du totem par le réseau est bien plus lente que le biberonnage : le totem joue le rôle de réservoir tampon entre deux bus.