Calculatrice autorisée

Exercice 1 : Un minerai radioactif

9 points

L'autunite, minéral jaune verdâtre découvert en Bourgogne à la fin du XVIIIe siècle, est un phosphate d'uranium et de calcium hydraté, $Ca(UO_2)_2(PO_4)_2 \cdot 10\,H_2O$. C'est en travaillant sur l'uranium qu'Henri Becquerel découvre la radioactivité en 1896.

1) Donner la définition d'un noyau radioactif.

2) L'uranium de l'autunite comprend trois isotopes naturels : l'uranium 238 (en écrasante majorité), l'uranium 235 et l'uranium 234. Le numéro atomique de l'uranium est $Z = 92$.

- **a.** Rappeler la définition de noyaux isotopes.
- **b.** Comparer la composition des noyaux d'uranium 235 et d'uranium 238.

3) Début de la chaîne de désintégration de l'uranium 238 :

$$^{238}_{92}\text{U} \longrightarrow {}^{234}_{90}\text{Th} \longrightarrow {}^{234}_{91}\text{Pa} \longrightarrow {}^{234}_{92}\text{U} \longrightarrow {}^{230}_{90}\text{Th} \longrightarrow \ldots$$

- **a.** Rappeler les lois de conservation, dites lois de Soddy, qui s'appliquent lors d'une désintégration.
- **b.** Écrire l'équation de la désintégration de l'uranium 238 en thorium 234. En déduire le type de radioactivité correspondant.
- **c.** Le thorium 234 se désintègre à son tour en protactinium 234. Écrire l'équation de cette désintégration et préciser la nature de la particule émise.

4) On note $N(t)$ le nombre de noyaux d'uranium 238 d'un échantillon à la date t, et N_0 ce nombre à la date $t = 0$. $N(t)$ vérifie l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N(t)$, où λ est la constante radioactive.

- **a.** Résoudre cette équation différentielle pour obtenir la loi de décroissance radioactive.
- **b.** Rappeler la définition du temps de demi-vie $t_{1/2}$.
- **c.** À l'aide de la loi de décroissance, établir la relation $t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$.
- **d.** Le temps de demi-vie de l'uranium 238 est $t_{1/2} = 4{,}5 \times 10^{9}\,\text{ans}$. En déduire la valeur de λ en an^{-1}, puis en s^{-1} (on prendra 1 an $= 365{,}25$ jours).

5) Une pierre contenant de l'autunite a une activité initiale $A_0 = 1{,}2 \times 10^{4}\,\text{Bq}$, que l'on attribue entièrement à l'uranium 238. On rappelle que l'activité vérifie $A(t) = \lambda N(t)$ et $A(t) = A_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

- **a.** Rappeler la définition de l'activité d'un échantillon radioactif et son unité.
- **b.** Calculer le nombre N_0 de noyaux d'uranium 238 présents dans la pierre à la date $t = 0$.
- **c.** Calculer l'activité de la pierre au bout de $10\,000$ ans. Commenter.
- **d.** Expliquer brièvement pourquoi une exposition prolongée à une telle pierre est dangereuse, et citer deux risques pour la santé.

Exercice 2 : Des supercondensateurs pour un bus électrique

11 points

Certains bus électriques roulent sur supercondensateurs. À chaque arrêt, le bus se connecte à une borne, le « totem », qui contient elle aussi des supercondensateurs. Le transfert d'énergie du totem

vers le bus, appelé « biberonnage », dure environ $12\,\text{s}$. Il doit être parfaitement sécurisé, car l'intensité du courant peut atteindre plusieurs milliers d'ampères au début du transfert. Les supercondensateurs du totem se comportent comme un condensateur unique, appelé condensateur totem, de capacité $C = 30\,\text{F}$ et de tension nominale $E = 800\,\text{V}$.

Partie A : modélisation de la décharge du condensateur totem

Le condensateur totem, complètement chargé sous la tension E, est placé dans le circuit de la figure 1. Le conducteur ohmique de résistance R modélise la faible résistance du circuit de décharge. À la date $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.
L'armature A du condensateur porte la charge $q(t)$.

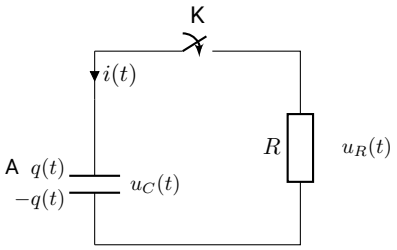

Figure 1 – Circuit de décharge

1) Sur la figure 1 (à compléter sur le sujet), représenter les flèches des tensions $u_C(t)$ et $u_R(t)$ en convention récepteur.

2) Définir l'intensité du courant électrique et donner la relation entre l'intensité $i(t)$ et la charge $q(t)$ de l'armature A.

3) En déduire la relation entre $i(t)$, la capacité C et la tension $u_C(t)$.

4) Montrer que la tension $u_C(t)$ vérifie l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}\,u_C(t) = 0$, en précisant l'expression de τ.

5) Montrer que τ est homogène à une durée.

6) À partir de l'équation différentielle de la question 4), montrer que $u_C(t) = E\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

7) Montrer qu'à la date $t = 5\tau$ on peut considérer que le condensateur totem est déchargé.

8) En déduire la valeur de R qui permet de respecter la durée de biberonnage.

Partie B : étude expérimentale de la décharge

La figure 2 représente l'évolution de la tension $u_C(t)$ lors de la décharge du condensateur totem.

9) Déterminer graphiquement la valeur de τ en expliquant la démarche (un tracé est attendu sur la figure 2). Comparer au résultat de la question 8).

10) Déterminer la valeur maximale $I_{\max}$ de l'intensité du courant pendant la décharge. Commenter au regard du texte d'introduction.

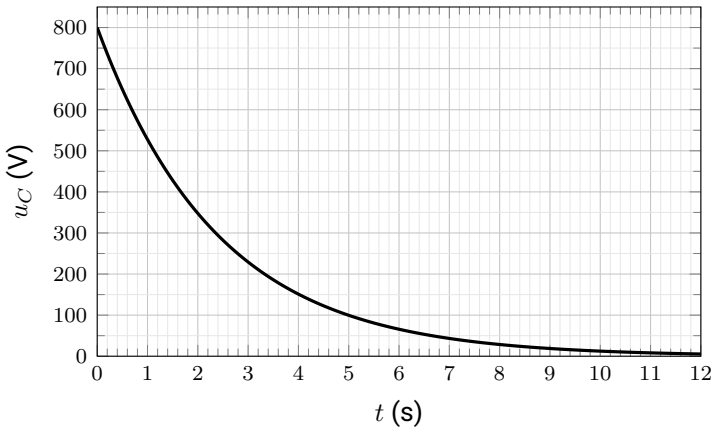

Figure 2 – Décharge du condensateur totem

11) Le condensateur totem est rechargé par le réseau électrique, qui fournit une puissance supposée constante $P = 12\,\text{kW}$. L'énergie emmagasinée dans un condensateur de capacité C soumis à la tension u_C est $W = \frac{1}{2}\,C\,u_C^2$. Estimer la durée de la recharge complète.