# Exercice 1 : Vitamine C et édulcorant

**10 points**

## Partie A : de l'acide aspartique à l'aspartame

**1)** On lit le nom « acide 2-aminobutanedioïque » morceau par morceau :

- « butane » : la chaîne carbonée la plus longue est formée de **quatre** atomes de carbone, reliés uniquement par des liaisons simples (les deux carbones des groupes – COOH en font partie) ;
- « acide …dioïque » : la molécule porte **deux** groupes carboxyle, un à chaque bout de la chaîne ; leurs carbones reçoivent les numéros 1 et 4 ;
- « 2-amino » : un groupe amino – $NH_2$ est fixé sur le carbone numéro 2 (la numérotation qui part de l'autre bout le placerait en 3 : on retient le plus petit numéro).

**2)** Familles des groupes encadrés :

- groupe 1 ( – COOH, carboxyle) : **acide carboxylique** ;
- groupe 2 ( – $NH_2$, amino) : **amine** ;
- groupe 3 ( – CO – NH – , carbonyle lié à un azote) : **amide** ;
- groupe 4 ( – CO – O – C, carbonyle lié à un oxygène lui-même lié à un carbone) : **ester**.

**3)** L'aspartame possède un groupe carboxyle (liaison O – H acide), une liaison N – H (amine et amide) et des liaisons C = O. Son spectre doit donc présenter une bande forte et large entre 2500 et $3\,500\,\text{cm}^{-1}$, une bande moyenne vers 3200 – $3\,300\,\text{cm}^{-1}$ et des bandes fortes et fines entre 1650 et $1\,750\,\text{cm}^{-1}$.

- **Spectre 1** : on y voit une large bande d'absorption d'environ 2500 à $3\,500\,\text{cm}^{-1}$ (O – H), sur laquelle se détache un pic plus étroit vers $3\,280\,\text{cm}^{-1}$ (N – H), ainsi que deux bandes fortes et fines vers 1740 et $1\,665\,\text{cm}^{-1}$ (C = O ; lecture à $\pm 20\,\text{cm}^{-1}$ près).
- **Spectre 2** : au-dessus de $2\,000\,\text{cm}^{-1}$, il ne présente que des bandes fines entre 2850 et $3\,000\,\text{cm}^{-1}$, dues aux liaisons C – H ; aucune bande large O – H, aucune bande N – H. La molécule correspondante ne peut donc pas être l'aspartame, malgré sa bande C = O vers $1\,740\,\text{cm}^{-1}$.

Conclusion : c'est **le spectre 1** qui correspond à l'aspartame.

## Partie B : une étape de la synthèse

**4)** Une réaction chimique conserve les éléments. On fait le bilan des atomes :

- côté réactifs : $C_{12}H_{13}O_6N$ + $C_7H_8O$ apportent 19 C, 21 H, 7 O et 1 N ;
- l'espèce (C), $C_{19}H_{19}O_6N$, en contient 19 C, 19 H, 6 O et 1 N.

Il reste 2 H et 1 O : l'espèce (D) a pour formule brute $\boxed{H_2O}$ ; c'est de l'eau.

**5)** La masse de (B) à prélever est $m_B = n_B\,M(B)$ et son volume $V_B = \dfrac{m_B}{\rho_B}$, d'où

$$V_B = \frac{n_B\,M(B)}{\rho_B} = \frac{1{,}25\times10^{-2}\times 108\,\text{g·mol}^{-1}}{1{,}04\,\text{g·mL}^{-1}} = \boxed{1{,}30\,\text{mL}}$$

**6)** Quantité de (A) introduite : $n_{\text{A}} = \dfrac{m_{\text{A}}}{M(\text{A})} = \dfrac{3{,}60\,\text{g}}{267\,\text{g·mol}^{-1}} = 1{,}35 \times 10^{-2}\,\text{mol}.$

(A) et (B) réagissent mole à mole et $n_{\text{B}} = 1{,}25 \times 10^{-2}\,\text{mol} < n_{\text{A}}$ : le réactif limitant est **(B)**. On obtiendrait donc au plus $n_{\text{C,max}} = n_{\text{B}}$, soit une masse

$$m_{\text{C,max}} = n_{\text{B}}\, M(\text{C}) = 1{,}25 \times 10^{-2} \times 357\,\text{g·mol}^{-1} = 4{,}46\,\text{g}$$

Le rendement est le rapport de la masse obtenue à cette masse maximale (on garde la valeur non arrondie $4{,}4625\,\text{g}$) :

$$\eta_1 = \frac{m_{\text{C}}}{m_{\text{C,max}}} = \frac{3{,}93\,\text{g}}{4{,}4625\,\text{g}} = 0{,}881 \qquad \boxed{\eta_1 \approx 88\,\%}$$

Vérification sur le protocole 2 : $n_{\text{A}} = 3{,}34/267 = 1{,}25 \times 10^{-2}\,\text{mol} = n_{\text{B}}$ et $3{,}35/4{,}4625 = 0{,}75$ : on retrouve les $75\,\%$ du tableau.

**7)** Les protocoles 2 et 3 donnent le même rendement ($75\,\%$), que la transformation dure 1 h ou 3 h : l'état final est atteint et il n'est pas total. La transformation conduit à un **équilibre chimique**, ce qu'indique d'ailleurs la double flèche de l'équation.

Pour déplacer cet équilibre dans le sens de la formation de (C), on peut :

- **retirer l'eau** (espèce D) du milieu dès qu'elle se forme (montage à séparateur, desséchant) : le quotient de réaction reste inférieur à la constante d'équilibre et le système continue d'évoluer dans le sens direct ;
- ou introduire l'un des réactifs (A ou B) en plus large excès, ce qui avait déjà fait passer le rendement de $75\,\%$ (protocole 2) à $88\,\%$ (protocole 1).

**8)** On compare les protocoles 2 et 3, dont la seule différence est la présence d'APTS (mêmes quantités de réactifs, même température). La masse de (C) obtenue, donc l'état final, est la même ; en revanche, elle est atteinte en 1 h avec l'APTS contre 3 h sans lui. L'APTS rend donc la transformation plus rapide, mais l'état final reste identique et l'APTS n'apparaît pas dans l'équation : il joue le rôle de **catalyseur**.

## Partie C : l'acide ascorbique, un acide faible

**9)** Avec $m = 0{,}500\,\text{g}$ et $V = 0{,}2500\,\text{L}$ :

$$c = \frac{n}{V} = \frac{m}{M\,V} = \frac{0{,}500\,\text{g}}{176\,\text{g·mol}^{-1} \times 0{,}2500\,\text{L}} = 1{,}136 \times 10^{-2}\,\text{mol·L}^{-1} \approx \boxed{1{,}14 \times 10^{-2}\,\text{mol·L}^{-1}}$$

**10)** L'acide ascorbique transfère un proton $\text{H}^+$ à une molécule d'eau ; comme c'est un acide faible, la réaction n'est pas totale (double flèche) :

$$\text{AH}\,(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}\,(\text{l}) \rightleftharpoons \text{A}^-\,(\text{aq}) + \text{H}_3\text{O}^+\,(\text{aq})$$

**11)** Par définition de la constante d'acidité du couple $\text{AH} / \text{A}^-$ :

$$K_A = \frac{[\text{A}^-]_{\text{éq}}\,[\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{éq}}}{[\text{AH}]_{\text{éq}}\,c^\circ}$$

Bilan de la réaction dans $1\,\text{L}$ de solution (on néglige les ions $H_3O^+$ venant de l'autoprotolyse de l'eau) :

| | AH | $H_2O$ | $A^-$ | $H_3O^+$ |
|---|---|---|---|---|
| apporté | $c$ | solvant | 0 | 0 |
| à l'équilibre | $c - x_{éq}$ | solvant | $x_{éq}$ | $x_{éq}$ |

Chaque ion ascorbate formé s'accompagne d'un ion oxonium : $[A^-]_{éq} = [H_3O^+]_{éq} = x_{éq}$. L'acide qui n'a pas réagi vaut $[AH]_{éq} = c - [H_3O^+]_{éq}$. On reporte ces deux expressions dans $K_A$ :

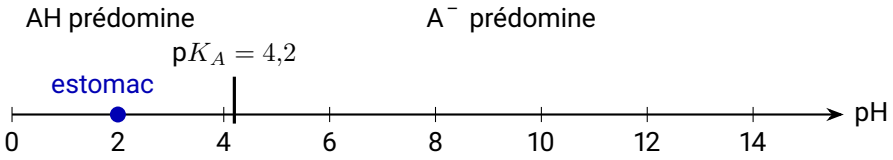
$$K_A = \frac{[H_3O^+]_{éq}^2}{\left(c - [H_3O^+]_{éq}\right) c^\circ}$$

**12)** $[H_3O^+]_{éq} = c^\circ \times 10^{-\text{pH}} = 10^{-3,1} = 7,9 \times 10^{-4}\,\text{mol·L}^{-1}$. En gardant les valeurs non arrondies :

$$K_A = \frac{(7,94 \times 10^{-4})^2}{1,136 \times 10^{-2} - 7,94 \times 10^{-4}} = \boxed{6,0 \times 10^{-5}} \qquad \text{p}K_A = -\log K_A = \boxed{4,2}$$

($K_A$ est sans unité.) Cette valeur est proche du p$K_A$ tabulé de l'acide ascorbique (4,1 à 4,2).

**13)** Diagramme de prédominance :



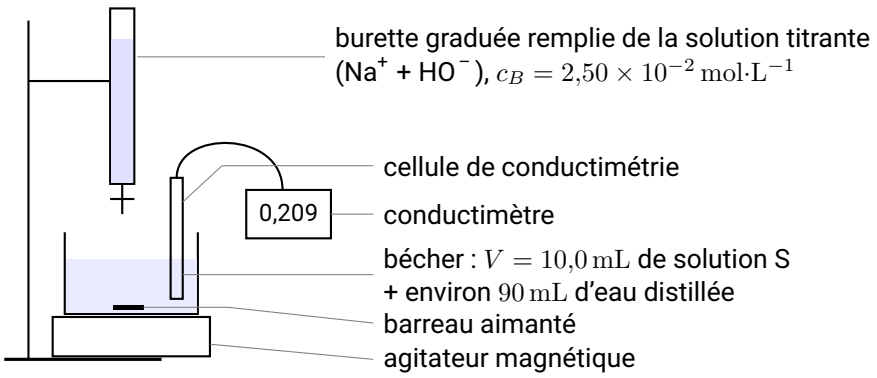

Le pH de l'estomac (environ 2) est inférieur au p$K_A$ (4,2) : la vitamine C s'y trouve principalement sous sa **forme acide AH** (acide ascorbique).

**14)** Réaction support du titrage, entre l'acide ascorbique et les ions hydroxyde ; elle est rapide et totale (flèche simple) :

$$AH\,(aq) + HO^-\,(aq) \longrightarrow A^-\,(aq) + H_2O\,(l)$$

Les ions sodium sont spectateurs.

**15)** Schéma attendu (les légendes comptent autant que le dessin) :



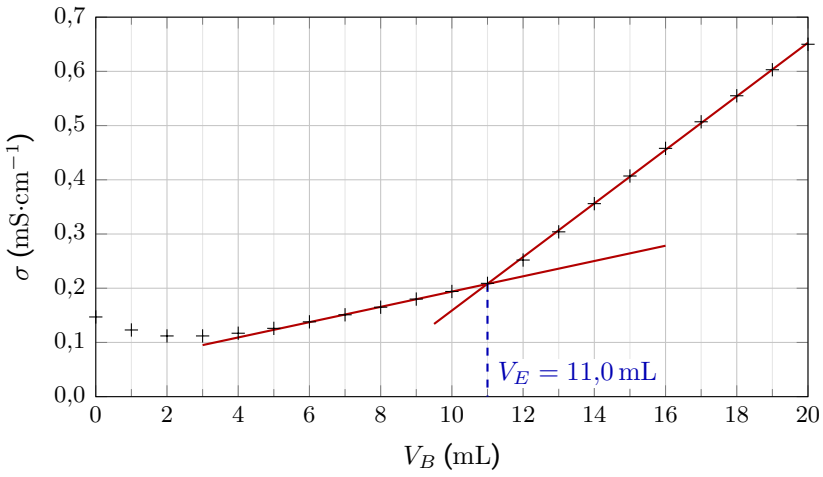
**16)** Le volume $V = 10{,}0\,\text{mL}$ se prélève avec une **pipette jaugée de** $10{,}0\,\text{mL}$, munie d'une propipette (ou poire d'aspiration).

**17)** La conductivité dépend des ions présents et de leur conductivité ionique molaire. On distingue trois phases.

- **Tout début (de 0 à 3 mL environ)** : l'acide faible est un peu dissocié (pH voisin de 3,4 dans le bécher), la solution contient donc quelques ions $H_3O^+$, très conducteurs ($\lambda = 35{,}0$). Ils réagissent avec les ions $HO^-$ versés et sont remplacés par des ions $Na^+$, beaucoup moins conducteurs ($\lambda = 5{,}01$) : $\sigma$ diminue légèrement.
- **Avant l'équivalence** : chaque ion $HO^-$ versé est consommé ; il est remplacé dans la solution par un ion $A^-$ formé, tandis qu'un ion $Na^+$ est ajouté. Les ions $Na^+$ et $A^-$, peu conducteurs ($5{,}01$ et $3{,}42$), s'accumulent : $\sigma$ croît avec une **faible pente**.
- **Après l'équivalence** : l'acide ascorbique est épuisé, les ions hydroxyde ne réagissent plus et restent en solution avec les ions sodium apportés. Comme $\lambda(HO^-) = 19{,}9$ est bien plus grand que $\lambda(A^-) = 3{,}42$, la **pente est nettement plus forte**.

Le changement de pente repère l'équivalence.

**18)** On trace deux droites qui prolongent les parties rectilignes, guidées par les points de 6 à $10\,\text{mL}$ et de 13 à $20\,\text{mL}$ (les premiers points, influencés par les ions $H_3O^+$, sont écartés). Elles se coupent à $V_E = 11{,}0\,\text{mL}$ (toute lecture entre 10,7 et $11{,}3\,\text{mL}$ est acceptée).




À l'équivalence, la quantité d'ions hydroxyde versée est égale à la quantité d'acide ascorbique présente au départ dans la prise d'essai (réaction mole à mole) : $c_S\,V = c_B\,V_E$. L'eau ajoutée dans le bécher ne change pas la quantité d'acide titré, elle n'intervient donc pas :

$$c_S = \frac{c_B\,V_E}{V} = \frac{2{,}50\times10^{-2}\,\text{mol·L}^{-1}\times 11{,}0\,\text{mL}}{10{,}0\,\text{mL}} = \boxed{2{,}75\times10^{-2}\,\text{mol·L}^{-1}}$$

**19)** Tout le comprimé se trouve dans les $V_0 = 100{,}0\,\text{mL}$ de solution S :

$$m_{\text{exp}} = c_S\,V_0\,M = 2{,}75\times10^{-2}\,\text{mol·L}^{-1}\times 0{,}1000\,\text{L}\times 176\,\text{g·mol}^{-1} = 0{,}484\,\text{g} \approx \boxed{0{,}48\,\text{g}}$$

(arrondi au centième, rang de l'incertitude-type donnée à la question suivante).

**20)** On compare l'écart à la valeur annoncée $m_{\text{réf}} = 0{,}500\,\text{g}$ à l'incertitude-type :

$$\frac{|m_{\text{exp}} - m_{\text{réf}}|}{u(m_{\text{exp}})} = \frac{|0{,}484 - 0{,}500|}{0{,}02} = 0{,}8$$

Ce quotient est inférieur à 2 : l'écart s'explique par la dispersion des mesures, **le titrage confirme l'indication de l'emballage**. La conclusion ne dépend pas de la lecture : pour $V_E$ entre 10,7 et $11{,}3\,\text{mL}$, $m_{\text{exp}}$ va de 0,471 à $0{,}497\,\text{g}$ et le quotient reste inférieur à 1,5.

## Exercice 2 : Le socle d'une sculpture

**5 points**

### Partie A : le chauffage dans la forge

**1)** Par définition de la masse volumique, $m_{\text{fer}} = \rho_{\text{fer}}\, V_{\text{fer}}$ :

$$m_{\text{fer}} = 7{,}87\,\text{g·cm}^{-3} \times 96{,}0\,\text{cm}^3 = 755{,}5\,\text{g} \approx \boxed{756\,\text{g}} = 0{,}756\,\text{kg}$$

**2)** Le socle est un solide (incompressible) qui ne change pas d'état, d'où $\Delta U = m\,c\,\Delta\theta$ ; une différence de températures s'exprime indifféremment en K ou en °C :

$$\Delta U = m_{\text{fer}}\, c_{\text{fer}}\,(\theta_0 - \theta_{\text{ext}}) = 0{,}7555\,\text{kg} \times 440\,\text{J·kg}^{-1}\text{·K}^{-1} \times 932\,\text{K} = \boxed{3{,}10 \times 10^5\,\text{J}}$$

**3)** La variation est positive : le fer a emmagasiné de l'énergie. À l'échelle des atomes, l'agitation thermique s'est accrue : chaque atome de fer oscille plus vivement sur place dans le cristal, si bien que l'énergie cinétique microscopique a augmenté avec la température.

### Partie B : le refroidissement

**4)** Système : le socle, solide incompressible, au repos à l'échelle macroscopique. Le travail reçu, y compris celui des coups de marteau, est négligé : pendant la courte durée $\text{d}t$ qui sépare les dates $t$ et $t + \text{d}t$, le premier principe se réduit donc à $\text{d}U = \delta Q$ (seul un transfert thermique est échangé).

- Variation d'énergie interne : $\text{d}U = m_{\text{fer}}\, c_{\text{fer}}\,\big(\theta(t + \text{d}t) - \theta(t)\big) = m_{\text{fer}}\, c_{\text{fer}}\,\text{d}\theta$.
- Transfert thermique reçu de l'air pendant $\text{d}t$ (flux constant sur une durée aussi brève) : $\delta Q = \Phi\,\text{d}t = h_{\text{air}}\, S\,(\theta_{\text{ext}} - \theta)\,\text{d}t$.

On égale ces deux expressions, puis on divise chaque membre par $m_{\text{fer}}\, c_{\text{fer}}\,\text{d}t$ :

$$\frac{\text{d}\theta}{\text{d}t} = \frac{h_{\text{air}}\, S}{m_{\text{fer}}\, c_{\text{fer}}}\,(\theta_{\text{ext}} - \theta) \quad\Longleftrightarrow\quad \boxed{\frac{\text{d}\theta}{\text{d}t} + \frac{\theta}{\tau} = \frac{\theta_{\text{ext}}}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m_{\text{fer}}\, c_{\text{fer}}}{h_{\text{air}}\, S}}$$

Vérification : $\tau = \dfrac{0{,}7555\,\text{kg} \times 440\,\text{J·kg}^{-1}\text{·K}^{-1}}{15\,\text{W·m}^{-2}\text{·K}^{-1} \times 310 \times 10^{-4}\,\text{m}^2} = 715\,\text{s}$, valeur de l'énoncé.

**5)** On dérive $\theta(t)$ ($\theta_0$, $\theta_{\text{ext}}$ et $\tau$ sont des constantes) : $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\theta_0 - \theta_{\text{ext}}}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Alors

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\theta}{\tau} = -\frac{\theta_0 - \theta_{\text{ext}}}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{\theta_0 - \theta_{\text{ext}}}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{\theta_{\text{ext}}}{\tau} = \frac{\theta_{\text{ext}}}{\tau}$$

quelle que soit la date $t$ : l'équation est satisfaite. Enfin, à $t = 0$, l'exponentielle vaut 1 et $\theta(0) = \theta_0$ : la fonction prend bien la valeur de départ voulue.

**6)** Entre la sortie de la forge et le contact avec la statue s'écoulent environ deux minutes (martelage puis trajet), soit $t = 120\,\mathrm{s}$ :

$$\theta(120\,\mathrm{s}) = (950 - 18) \times \mathrm{e}^{-120/715} + 18 = \boxed{806\,^\circ\mathrm{C}}$$

Le socle reste donc brûlant : deux minutes, c'est bien moins que $\tau$, et sa température n'a baissé que d'environ $140\,^\circ\mathrm{C}$.

**7)** Pour la trempe, on garde la même loi, où $h_{\text{eau}}$ prend la place de $h_{\text{air}}$, avec une température initiale $\theta_1 = 806\,^\circ\mathrm{C}$ et une température extérieure de $18\,^\circ\mathrm{C}$ :

$$\theta(t) = (\theta_1 - \theta_{\text{ext}})\,\mathrm{e}^{-t/\tau'} + \theta_{\text{ext}} \qquad \text{avec} \qquad \tau' = \frac{m_{\text{fer}}\,c_{\text{fer}}}{h_{\text{eau}}\,S} = \frac{0{,}7555 \times 440}{400 \times 310 \times 10^{-4}} = 26{,}8\,\mathrm{s}$$

On cherche la date $t_{\text{f}}$ à laquelle $\theta(t_{\text{f}}) = \theta_{\text{f}}$ : on isole l'exponentielle, puis on prend le logarithme népérien.

$$\mathrm{e}^{-t_{\text{f}}/\tau'} = \frac{\theta_{\text{f}} - \theta_{\text{ext}}}{\theta_1 - \theta_{\text{ext}}} \quad\Longrightarrow\quad t_{\text{f}} = \tau' \ln\left(\frac{\theta_1 - \theta_{\text{ext}}}{\theta_{\text{f}} - \theta_{\text{ext}}}\right) = 26{,}8\,\mathrm{s} \times \ln\left(\frac{788}{22}\right) = \boxed{96\,\mathrm{s}}$$

Le modèle prévoit donc environ une minute et demie de trempe.

**8)** Cherchons quel temps caractéristique $\tau''$ rendrait compte d'une trempe de $15\,\mathrm{s}$. Avec la même loi exponentielle :

$$\tau'' = \frac{t_{\text{réel}}}{\ln\left(\dfrac{\theta_1 - \theta_{\text{ext}}}{\theta_{\text{f}} - \theta_{\text{ext}}}\right)} = \frac{15\,\mathrm{s}}{\ln(788/22)} = 4{,}2\,\mathrm{s}$$

Or $\tau = \dfrac{m_{\text{fer}}\,c_{\text{fer}}}{h\,S}$ ; le coefficient de transfert qu'il faudrait est donc

$$h'' = \frac{m_{\text{fer}}\,c_{\text{fer}}}{\tau''\,S} = \frac{0{,}7555 \times 440}{4{,}19 \times 310 \times 10^{-4}} \approx 2{,}6 \times 10^{3}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-1}}$$

soit environ six fois la valeur $h_{\text{eau}} = 400\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-1}}$ fournie. Le modèle, qui suppose $h$ constant et égal à cette valeur, ne décrit donc pas correctement la trempe.

Interprétation : à plusieurs centaines de degrés, le métal rayonne une part notable de son énergie ; surtout, la couche d'eau à son contact bout, et la vaporisation de cette eau prélève au fer une grande quantité d'énergie, tandis que les bulles brassent le bain et ramènent sans cesse de l'eau froide contre la pièce. Le modèle ignore ces deux mécanismes, prépondérants au début de la trempe.

## Exercice 3 : Un service de pelote basque

**5 points**

### Partie A : du chistera au mur

**1)** On parle de chute libre quand un système ne subit aucune autre action que son poids. Ici, l'énoncé demande de négliger l'action de l'air (frottements et poussée d'Archimède) : il ne reste que le poids, l'hypothèse de chute libre est donc justifiée.

**2)** Système : la balle, dont la masse $m$ ne varie pas, étudiée dans le référentiel terrestre (supposé galiléen). Bilan des actions : le poids uniquement, $\vec{P} = m\,\vec{g}$. La deuxième loi de Newton donne $m\,\vec{a} = m\,\vec{g}$, soit $\vec{a} = \vec{g}$.

Le champ $\vec{g}$ est vertical et dirigé vers le bas : sur l'axe horizontal, $a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0$. La composante horizontale de la vitesse ne varie donc pas : $v_x(t) = v_0\cos(\alpha)$ à toute date. Une primitive donne $x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t + C$ ; comme $x(0) = -D$, la constante vaut $C = -D$ :

$$\boxed{x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t - D}$$

**3)** Le mur est à l'abscisse $x = 0$ ; on écrit que $x(t_\mathrm{F}) = 0$, ce qui donne :

$$t_\mathrm{F} = \frac{D}{v_0\cos(\alpha)} = \frac{36\,\mathrm{m}}{38{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \times \cos(13°)} = \boxed{0{,}97\,\mathrm{s}}$$

soit bien environ $1\,\mathrm{s}$ (calculatrice en mode degrés).

### Partie B : bilan énergétique avant le rebond

**4)** Avec l'axe $(Oy)$ vertical vers le haut et l'origine de $E_\mathrm{pp}$ au sol :

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \qquad E_\mathrm{pp} = m\,g\,y \qquad E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{pp} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,y$$

**5)** Au départ, $v = v_0$ et $m = 140\,\mathrm{g} = 0{,}140\,\mathrm{kg}$ :

$$E_\mathrm{c}(0) = \frac{1}{2} \times 0{,}140\,\mathrm{kg} \times (38{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 = \boxed{101\,\mathrm{J}}$$

**6)**

- **Courbe 3** : elle est horizontale. Le poids, unique force, est conservatif : $E_\mathrm{m}$ garde donc la même valeur pendant tout le trajet : c'est la courbe 3.
- **Courbe 2** : elle commence vers $101\,\mathrm{J}$, c'est-à-dire $E_\mathrm{c}(0)$ trouvée à la question 5, puis baisse doucement pendant la montée, où la balle perd de la vitesse : elle correspond à $E_\mathrm{c}$.
- **Courbe 1** : faible, elle augmente puis se stabilise, en suivant la hauteur $y$, qui croît jusqu'au sommet de la trajectoire (atteint juste avant le mur) ; comme $E_\mathrm{pp}$ varie proportionnellement à $y$, la courbe 1 est celle de $E_\mathrm{pp}$.

Contrôle à $t = 0$ : $E_\mathrm{c} + E_\mathrm{pp} \approx 101 + 3{,}4 \approx 104{,}5\,\mathrm{J}$, valeur de la courbe 3.

**7)** Au départ, $y = h$ et la courbe 1 indique $E_\mathrm{pp}(0) \approx 3{,}4\,\mathrm{J}$ (une petite graduation vaut $2\,\mathrm{J}$ : on accepte une lecture entre 2,8 et $4{,}0\,\mathrm{J}$ ; on peut aussi lire $E_\mathrm{m} \approx 104{,}5\,\mathrm{J}$ et retrancher $E_\mathrm{c}(0)$). Comme

$E_{pp}(0) = m\,g\,h$ :

$$h = \frac{E_{pp}(0)}{m\,g} = \frac{3{,}4\,\text{J}}{0{,}140\,\text{kg} \times 9{,}81\,\text{m·s}^{-2}} \approx \boxed{2{,}5\,\text{m}}$$

Avec la plage de lecture, $h$ est compris entre 2,0 et $2{,}9\,\text{m}$ : une hauteur vraisemblable pour un joueur qui lance la balle bras levé.

## Partie C : après le rebond

**8)** À la nouvelle origine des dates ($t = 0$), la balle est en F : $y(0) = 6{,}2$, donc $\boxed{H = 6{,}2\,\text{m}}$. C'est cohérent avec la figure 2 : à $t_F$, $E_{pp} \approx 8{,}5\,\text{J}$, soit $y = 8{,}5/(0{,}140 \times 9{,}81) \approx 6{,}2\,\text{m}$.

**9)** On dérive $x(t)$ et $y(t)$ par rapport au temps :

$$v_x(t) = \frac{\text{d}x}{\text{d}t} = -24{,}0 \qquad v_y(t) = \frac{\text{d}y}{\text{d}t} = -9{,}8\,t - 1{,}0$$

Juste après le rebond ($t = 0$) : $v_x = -24{,}0\,\text{m·s}^{-1}$ et $v_y = -1{,}0\,\text{m·s}^{-1}$, d'où

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{24{,}0^2 + 1{,}0^2} = \boxed{24{,}0\,\text{m·s}^{-1}}$$

On retrouve la valeur $v_F = 24{,}0\,\text{m·s}^{-1}$ de l'énoncé : la composante verticale, faible, ne modifie presque pas la norme.

**10)** L'accélération est égale à $\vec{g}$, donc $a_y = -g$ ; en intégrant deux fois, on obtient $y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_y(0)\,t + y(0)$. Par identification, le nombre placé devant $t^2$ est

$$-\frac{g}{2} = -\frac{9{,}81}{2} \approx \boxed{-4{,}9\,\text{m·s}^{-2}}$$

Chaque terme de $y(t)$ est une longueur : ce coefficient multiplié par des $\text{s}^2$ doit donner des mètres, il s'exprime donc en $\text{m·s}^{-2}$, l'unité d'une accélération.

**11)** La balle retombe au sol lorsque $y = 0$ : $-8{,}5 \times 10^{-3}\,x^2 + 4{,}2 \times 10^{-2}\,x + 6{,}2 = 0$. Discriminant :

$$\Delta = (4{,}2 \times 10^{-2})^2 - 4 \times (-8{,}5 \times 10^{-3}) \times 6{,}2 = 0{,}2126 \qquad \sqrt{\Delta} = 0{,}4611$$

$$x_1 = \frac{-4{,}2 \times 10^{-2} + 0{,}4611}{2 \times (-8{,}5 \times 10^{-3})} = -24{,}7\,\text{m} \qquad x_2 = \frac{-4{,}2 \times 10^{-2} - 0{,}4611}{2 \times (-8{,}5 \times 10^{-3})} = 29{,}6\,\text{m}$$

La solution $x_2 > 0$ se situerait derrière le mur : elle est écartée. La balle retombe en $x = -24{,}7\,\text{m}$ (même résultat avec les équations horaires : $y = 0$ pour $t = 1{,}03\,\text{s}$, et $x = -24{,}0 \times 1{,}03 \approx -24{,}7\,\text{m}$).

Or $-28\,\text{m} < -24{,}7\,\text{m} < -16\,\text{m}$ : la balle a dépassé la ligne 4 sans atteindre la ligne 7. **Le service est bon**, avec une marge confortable (environ $3\,\text{m}$ avant la ligne 7).