Calculatrice autorisée

Exercice 1 : Une chaîne du froid sans électricité

6 points

La plupart des vaccins perdent leur efficacité s'ils sortent de l'intervalle de température $2\,°\mathrm{C}$ à $8\,°\mathrm{C}$. Lors des campagnes de vaccination menées dans des villages isolés, sans réseau électrique, les équipes transportent les flacons dans de l'eau très froide contenue dans un récipient isotherme à double paroi, dont une coupe simplifiée est donnée sur la figure 1.

On cherche d'abord à comprendre comment ce récipient limite les échanges d'énergie, puis on mesure la capacité thermique de son vase interne pour identifier le métal dont il est fait ; on se demande enfin si les flacons resteront assez froids pendant toute une journée de tournée.

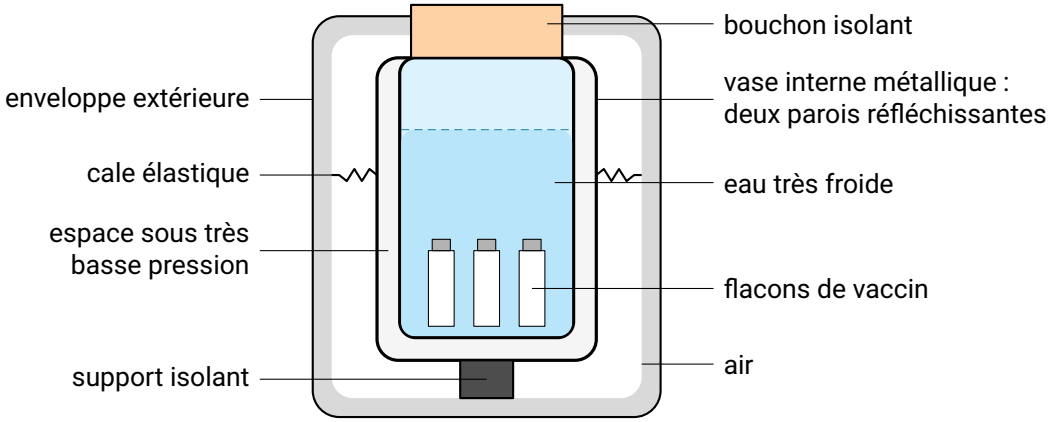


Figure 1 – Coupe simplifiée du récipient isotherme (sans échelle)

Partie A : un récipient conçu pour isoler

Dans un récipient isotherme bon marché, l'espace qui sépare le vase interne de l'enveloppe extérieure est garni d'une mousse isolante. Dans le modèle étudié ici, le vase interne ne touche jamais l'enveloppe : il est seulement maintenu par quelques cales élastiques et par un petit support isolant placé sous son fond.

1) Le vase ne repose que sur des cales et un support isolant. Quel mode de transfert thermique vers l'enveloppe ce montage permet-il de réduire ?

2) Les deux parois du vase interne sont rendues réfléchissantes. Expliquer ce que l'on gagne ainsi.

3) Pourquoi avoir enfermé, entre les deux parois du vase interne, un gaz sous très basse pression ?

Partie B : de quel métal le vase interne est-il fait ?

On introduit dans le vase interne une masse $m_\mathrm{F} = 250\,\mathrm{g}$ d'eau froide ; l'eau et le vase sont alors à la même température $\theta_\mathrm{F} = 12{,}0\,°\mathrm{C}$. On ajoute rapidement une masse $m_\mathrm{C} = 150\,\mathrm{g}$ d'eau chaude, à la température $\theta_\mathrm{C} = 70{,}0\,°\mathrm{C}$, on ferme et on agite doucement. Au bout de quatre minutes, la température ne varie plus : elle vaut $\theta_\mathrm{f} = 32{,}4\,°\mathrm{C}$.

Données

- Capacités thermiques massiques de quelques métaux, à $25\,°\mathrm{C}$ et sous la pression atmosphérique :

Métal	Cuivre	Acier inoxydable	Titane	Aluminium
$c\,(\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}})$	385	500	520	900

- Capacité thermique massique de l'eau, supposée constante : $c_{\mathrm{eau}} = 4{,}18 \times 10^3\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$.
- On note C_{V} la capacité thermique du vase ; sa masse vaut $m_{\mathrm{V}} = 120\,\mathrm{g}$.
- L'air enfermé sous le bouchon a une influence négligeable.
- Pendant l'expérience, l'air de la salle reste à la température $\theta_{\mathrm{air}} = 20\,°\mathrm{C}$ et à pression constante ; la mesure dure $\Delta t = 240\,\mathrm{s}$.

Le système étudié, noté Σ, réunit trois parties : le vase interne, l'eau froide et l'eau chaude. Leurs variations d'énergie interne entre l'état initial et l'état final s'écrivent :

$$\Delta U_{\mathrm{V}} = C_{\mathrm{V}}\,(\theta_{\mathrm{f}} - \theta_{\mathrm{F}}) \qquad \Delta U_{\mathrm{F}} = m_{\mathrm{F}}\,c_{\mathrm{eau}}\,(\theta_{\mathrm{f}} - \theta_{\mathrm{F}}) \qquad \Delta U_{\mathrm{C}} = m_{\mathrm{C}}\,c_{\mathrm{eau}}\,(\theta_{\mathrm{f}} - \theta_{\mathrm{C}})$$

et celle du système est leur somme : $\Delta U_{\Sigma} = \Delta U_{\mathrm{V}} + \Delta U_{\mathrm{F}} + \Delta U_{\mathrm{C}}$.
On fait deux hypothèses pour la durée de la mesure :

- hypothèse 1 : le système Σ n'échange aucune énergie par transfert thermique avec l'extérieur ;
- hypothèse 2 : il n'échange pas non plus d'énergie sous forme de travail.

4) Expliquer pourquoi ces deux hypothèses permettent d'écrire, par le premier principe, $\Delta U_{\Sigma} = 0$.

On admet que l'on en déduit :

$$C_{\mathrm{V}} = \frac{m_{\mathrm{C}}\,c_{\mathrm{eau}}\,(\theta_{\mathrm{C}} - \theta_{\mathrm{f}})}{\theta_{\mathrm{f}} - \theta_{\mathrm{F}}} - m_{\mathrm{F}}\,c_{\mathrm{eau}}$$

5) Calculer la capacité thermique C_{V} du vase interne.

6) En déduire la capacité thermique massique du matériau du vase, puis identifier ce matériau à l'aide des données.

En réalité, le système n'est pas parfaitement isolé : une fois l'équilibre atteint, sa température finit par évoluer au bout de quelques heures. Entre le système Σ et l'air de la salle, la résistance thermique vaut environ $R_{\mathrm{th}} = 18\,\mathrm{K{\cdot}W^{-1}}$.

7) Le système étant à $\theta_{\mathrm{f}} = 32{,}4\,°\mathrm{C}$, vérifier que l'énergie qu'il perd au profit de l'air de la salle correspond à un flux Φ d'environ $0{,}7\,\mathrm{W}$.

8) En déduire un ordre de grandeur de l'énergie Q perdue ainsi au cours de la mesure, qui dure Δt.

9) Calculer ΔU_{C}, variation de l'énergie interne de l'eau chaude pendant la mesure, et la comparer à Q. L'hypothèse 1 est-elle raisonnable ?

Partie C : une journée de tournée

Au départ de la tournée, à 6 h 30, le récipient est rempli d'eau à $\theta_0 = 2{,}0\,°\mathrm{C}$ (température atteinte après équilibre avec le vase interne). Il voyage ensuite dans un véhicule où l'air reste à la température constante $\theta_{\mathrm{a}} = 30\,°\mathrm{C}$. On admet que la température $\theta(t)$ de l'eau vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau}\left(\theta_{\mathrm{a}} - \theta(t)\right) \qquad \text{avec } \tau = 60\,\mathrm{h}$$

10) Vérifier que la fonction $\theta(t) = (\theta_0 - \theta_a)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \theta_a$ est solution de cette équation différentielle et qu'elle respecte la condition initiale.

11) Le retour est prévu à 18 h 30. Les vaccins seront-ils encore dans le bon intervalle de température à l'arrivée ?

Exercice 2 : Le condensateur d'un filtre d'enceinte

4 points

Dans une enceinte acoustique, un filtre électrique envoie les sons aigus vers un petit haut-parleur (le tweeter) et les sons graves vers un plus gros. Ce filtre contient des condensateurs « à film » : de fines bandes de polypropylène, un plastique très isolant, y alternent avec des couches de métal déposées sous vide, un grand nombre de fois. Leur capacité varie très peu avec la température et ils supportent des tensions élevées.

Un amateur qui répare son enceinte veut vérifier la capacité d'un condensateur de rechange (partie A), puis comprendre comment ce composant est construit (partie B).

Partie A : mesure de la capacité

On place le condensateur (capacité C) dans le circuit de la figure 2 : un générateur idéal de tension, de force électromotrice $E = 9{,}0\,\mathrm{V}$, un interrupteur K et un conducteur ohmique de résistance $R = 100\,\mathrm{k\Omega}$. Le condensateur est déchargé lorsqu'on ferme l'interrupteur, à la date $t = 0$.

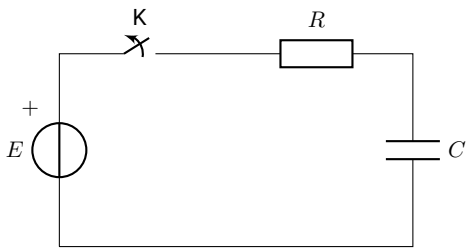


Figure 2 – Circuit de charge du condensateur

1) Reproduire le schéma sur la copie. Y flécher le courant i qui circule pendant la charge, puis représenter par des flèches les tensions E, u_R (aux bornes du conducteur ohmique) et u_C (aux bornes du condensateur).

2) Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C et la mettre sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

en donnant l'expression de la constante τ.

3) Justifier, à partir de cette équation, que τ s'exprime en secondes.

Un système d'acquisition enregistre la tension u_C pendant la charge (figure 3).

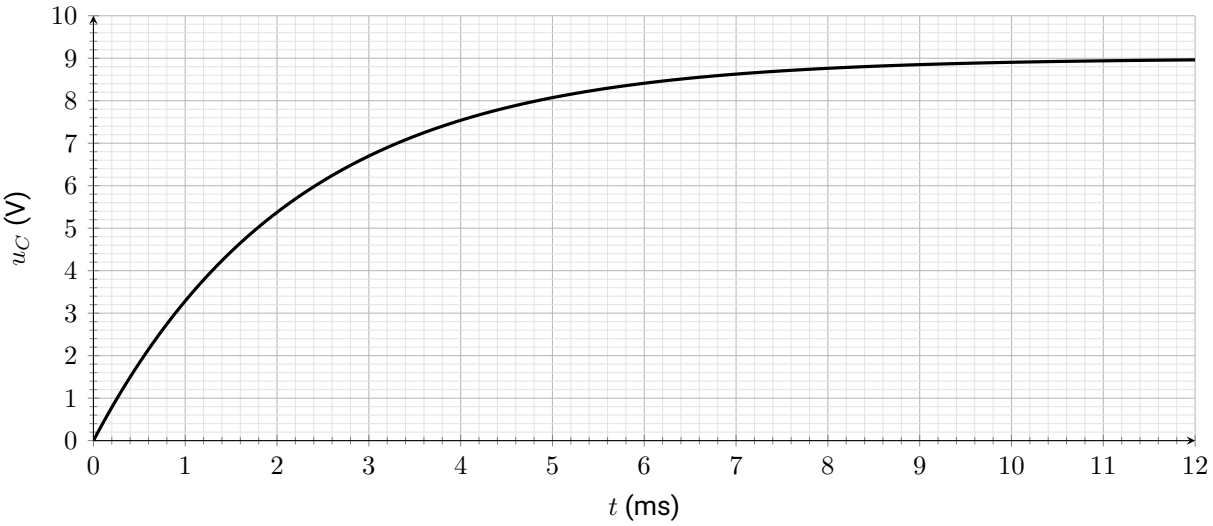


Figure 3 – Tension aux bornes du condensateur pendant la charge (à compléter sur le sujet)

4) Lire sur la figure 3 la valeur de τ ; les tracés effectués doivent rester visibles.

5) Calculer alors la capacité C que fournit cette mesure, le circuit étant décrit par le modèle RC.

Partie B : à l'intérieur du condensateur

Le modèle le plus simple est le condensateur plan : deux armatures métalliques planes, de même aire S, séparées par une couche d'isolant d'épaisseur a (figure 4). On néglige l'épaisseur des armatures devant celle de l'isolant. Sa capacité vaut

$$C_0 = \frac{\varepsilon\, S}{a}$$

où ε est une constante qui caractérise l'isolant ; pour le polypropylène, $\varepsilon = 1{,}95 \times 10^{-11}\ \mathrm{F{\cdot}m^{-1}}$.

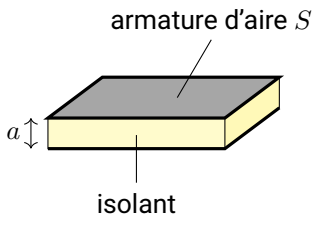


Figure 4 – Condensateur plan

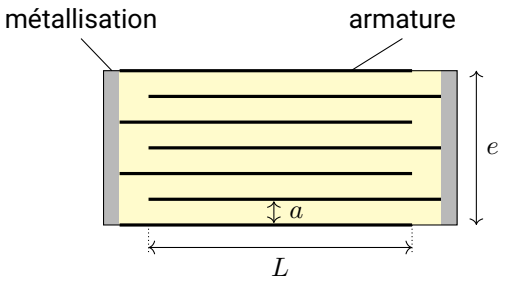


Figure 5 – Coupe du condensateur à film ; la profondeur des armatures (perpendiculaire à la feuille) est notée h

6) Comment la capacité d'un condensateur plan varie-t-elle avec l'aire S des armatures et avec l'épaisseur a de l'isolant ?

Le condensateur à film est un empilement d'armatures métalliques rectangulaires, de longueur L et de profondeur h, séparées par des couches d'isolant identiques (figure 5). Les métallisations latérales relient une armature sur deux à la même borne : l'ensemble équivaut à n condensateurs plans identiques, de capacité C_0, montés en dérivation, d'où $C = n \times C_0$. L'épaisseur totale de l'empilement est notée e.

7) Exprimer la capacité C du condensateur à film en fonction de ε, L, h, e et de n, nombre des condensateurs élémentaires.

Le catalogue du fabricant donne les dimensions de trois modèles :

Capacité C (nF) à $2\,\%$ près	L (mm) à $0{,}5\,\text{mm}$ près	h (mm) à $0{,}5\,\text{mm}$ près	e (mm) à $0{,}5\,\text{mm}$ près
10,0	13,0	6,0	4,0
22,0	12,0	8,0	5,0
47,0	18,0	9,0	6,5

8) Le condensateur de rechange est le modèle de $22{,}0\,\text{nF}$. Combien de condensateurs élémentaires renferme-t-il ?

9) Le fabricant indique que ce modèle compte 260 armatures métalliques. Commenter.

Exercice 3 : Dater un ancien foyer

4 points

À la fin du XIXe siècle, des physiciens remarquent que certaines substances émettent spontanément un rayonnement capable de traverser la matière : c'est la découverte de la radioactivité. On sait aujourd'hui que ce rayonnement vient de noyaux instables, qui se transforment spontanément en d'autres noyaux en émettant une particule α (noyau d'hélium) ou une particule β (électron ou positon). Le noyau formé, appelé noyau fils, est souvent produit dans un état excité ; il revient à son état fondamental en émettant un rayonnement γ, de nature électromagnétique comme la lumière, mais bien plus énergétique.

Partie A : reconnaître une désintégration

Le tableau ci-contre range quelques noyaux par numéro atomique (colonnes) et par nombre de nucléons (lignes). La flèche relie un noyau père au noyau fils obtenu par sa désintégration.

$Z = 86$	$Z = 87$	$Z = 88$
		$^{226}_{88}\text{Ra}$
	$^{225}_{87}\text{Fr}$	$^{225}_{88}\text{Ra}$
		$^{224}_{88}\text{Ra}$
$^{223}_{86}\text{Rn}$	$^{223}_{87}\text{Fr}$	
$^{222}_{86}\text{Rn}$	$^{222}_{87}\text{Fr}$	

1) La désintégration ne produit qu'une particule en plus du noyau fils. Écrire l'équation de cette désintégration en citant les deux lois de conservation utilisées (lois de Soddy), puis nommer le type de radioactivité correspondant.

Partie B : le carbone 14

Dans la haute atmosphère, des neutrons produits par le rayonnement cosmique frappent des noyaux d'azote 14 et les transforment en carbone 14, un isotope radioactif du carbone. Ce carbone 14 s'oxyde aussitôt en dioxyde de carbone, qui se mêle à celui de l'air ; les végétaux l'absorbent par photosynthèse et les animaux qui les mangent l'intègrent à leur tour. Comme la production et la désintégration se compensent, la proportion de carbone 14 reste à peu près la même dans l'atmosphère et dans tous les êtres vivants : un gramme de carbone prélevé sur un organisme vivant présente une activité moyenne de 13,6 désintégrations par minute. À la mort de l'organisme, les échanges avec l'atmosphère cessent : le carbone 14 qu'il contient se désintègre sans être renouvelé, ce qui permet de dater sa mort.

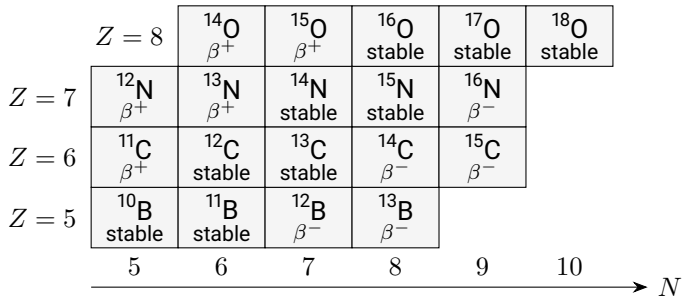


Figure 6 – Extrait du diagramme (N, Z) : pour chaque noyau, stable ou type de radioactivité

2) Que signifie le fait que deux noyaux sont isotopes ?

3) À l'aide de la figure 6, écrire l'équation de la désintégration du carbone 14.

Partie C : loi de décroissance radioactive

Pour une population de noyaux radioactifs, la variation ΔN du nombre moyen de noyaux pendant une durée courte Δt (entre t et $t + \Delta t$) vérifie $\Delta N = -\lambda\, N\, \Delta t$, N désignant le nombre de noyaux présents à l'instant t. On en tire $N(t) = N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$ (loi de décroissance radioactive), avec N_0 le nombre initial de noyaux. La demi-vie du carbone 14 vaut $t_{1/2} = 5\,730\,\text{ans}$.

4) Comment appelle-t-on la grandeur λ ?

5) Que représente la demi-vie d'un noyau radioactif comme le carbone 14 ?

6) En combinant la loi de décroissance avec la définition de $t_{1/2}$, établir la relation $\lambda = \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}}$.

7) En raisonnant sur les dimensions, donner l'unité de λ dans le Système international.

8) L'activité A d'un échantillon est le nombre de désintégrations qui s'y produisent par seconde. Montrer qu'elle est liée au nombre N de noyaux radioactifs de l'échantillon par $A = \lambda\, N$.

9) Un échantillon de bois prélevé sur un arbre vivant contient $3{,}0\,\text{g}$ de carbone. Calculer le nombre de noyaux de carbone 14 qu'il renferme. On prendra $1\ \text{an} = 3{,}16 \times 10^7\,\text{s}$.

Partie D : datation

L'activité du carbone 14 d'un échantillon suit elle aussi une loi exponentielle : $A(t) = A_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$, où A_0 est l'activité à la mort de l'organisme. Des archéologues ont dégagé, sur un ancien campement, un foyer contenant des charbons de bois. Mesurée au laboratoire, leur activité, rapportée à un gramme de carbone, vaut $A = 4{,}25\,\text{min}^{-1}$; pour le bois vivant, on prend $A_0 = 13{,}6\,\text{min}^{-1}$ (toujours pour un gramme de carbone).

10) Montrer que l'âge t de l'échantillon, c'est-à-dire la durée écoulée depuis la mort du bois, s'écrit :

$$t = \frac{t_{1/2}}{\ln 2}\, \ln\left(\frac{A_0}{A}\right)$$

11) Calculer l'âge des charbons du foyer, en faisant figurer l'application numérique.

Exercice 4 : Une coloration pour cheveux

6 points

Teindre ses cheveux ou masquer des cheveux blancs : les colorations dites « d'oxydation » tiennent longtemps parce que la molécule colorée se forme à l'intérieur même du cheveu. Juste avant l'application, le coiffeur mélange, à volumes à peu près égaux, une solution oxydante contenant du peroxyde d'hydrogène et une crème colorante. Cette crème apporte les molécules qui, en s'associant, donneront la couleur ; elle contient aussi de l'ammoniac (ou une amine) qui rend le milieu basique. Après le temps de pose, un rinçage puis un shampoing éliminent l'excès de base.

On étudie ici la solution oxydante, puis la crème colorante, et enfin la couleur obtenue.

Partie A : la solution oxydante

Un fournisseur pour salons de coiffure propose quatre solutions oxydantes :

Solution	n° 1	n° 2	n° 3	n° 4
Pourcentage en masse de peroxyde d'hydrogène	$3{,}0\,\%$	$6{,}0\,\%$	$9{,}0\,\%$	$12{,}0\,\%$
Masse volumique de la solution ($\mathrm{g{\cdot}L^{-1}}$)	1010	1020	1031	1042
Titre en volume (défini plus loin)	10 volumes	20 volumes	30 volumes	40 volumes

Figure 7 – Solutions oxydantes proposées

Pour savoir laquelle de ces solutions contient un flacon, noté S, dont l'étiquette est illisible, on titre le peroxyde d'hydrogène $H_2O_2(aq)$ par une solution acidifiée de permanganate de potassium, qui contient des ions potassium $K^+(aq)$ et des ions permanganate $MnO_4^-(aq)$; ces derniers sont la seule espèce colorée (violette) du milieu. La réaction support du titrage a pour équation :

$$2\,\mathrm{MnO_4^-(aq)} + 6\,\mathrm{H^+(aq)} + 5\,\mathrm{H_2O_2(aq)} \longrightarrow 2\,\mathrm{Mn^{2+}(aq)} + 5\,\mathrm{O_2(g)} + 8\,\mathrm{H_2O\,(l)}$$

La solution S, trop concentrée, est d'abord diluée 25 fois : on obtient la solution $\mathrm{S'}$. On verse $V_1 = 10{,}0\,\mathrm{mL}$ de $\mathrm{S'}$ dans un erlenmeyer, avec quelques gouttes d'acide sulfurique concentré. On remplit la burette de solution de permanganate de potassium, de concentration $c_2 = 2{,}00 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}$. La teinte violette persiste à partir d'un volume versé $V_\mathrm{E} = 22{,}0\,\mathrm{mL}$.

Données

- Masse molaire du peroxyde d'hydrogène : $M(\mathrm{H_2O_2}) = 34\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$.
- Volume molaire des gaz dans les CNTP ($0\,^\circ\mathrm{C}$, $1{,}013 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$) : $V_\mathrm{m} = 22{,}4\,\mathrm{L{\cdot}mol^{-1}}$.

1) Écrire la relation, valable à l'équivalence, entre n_1 (peroxyde d'hydrogène titré) et $n_{2,\mathrm{E}}$ (ions permanganate versés).

2) Calculer c_1, concentration de H_2O_2 dans $\mathrm{S'}$.

3) Quelle est alors la concentration c de H_2O_2 dans le flacon S ?

4) À l'aide de la figure 7, identifier la solution oxydante contenue dans le flacon S.

Le titre en volume d'une solution de peroxyde d'hydrogène est le volume de dioxygène, exprimé en litres et mesuré dans les conditions normales de température et de pression (CNTP), que libère la décomposition complète d'un litre de cette solution. Cette décomposition a pour équation :

$$2\,\mathrm{H_2O_2(aq)} \longrightarrow \mathrm{O_2(g)} + 2\,\mathrm{H_2O\,(l)}$$

Pour la question suivante, toute démarche, même inaboutie, sera valorisée si elle est clairement présentée.

5) Montrer que la teneur massique de la solution identifiée ci-dessus s'accorde avec son titre en volume (figure 7).

Partie B : la crème colorante

La base contenue dans la crème maintient le mélange posé sur la chevelure à un pH voisin de 9,5. Dans ce milieu basique, les écailles qui recouvrent le cheveu s'écartent, ce qui laisse les précurseurs de la couleur pénétrer profondément dans la fibre.

Données

- Couples acide-base : $NH_4^+(aq)$ / $NH_3(aq)$; $H_3O^+(aq)$ / $H_2O(l)$; $H_2O(l)$ / $HO^-(aq)$.
- Produit ionique de l'eau à $25\,°C$: $K_e = 1{,}0 \times 10^{-14}$; concentration standard : $c^\circ = 1\,\text{mol·L}^{-1}$.
- $pK_A(NH_4^+/NH_3) = 9{,}2$ à $25\,°C$.

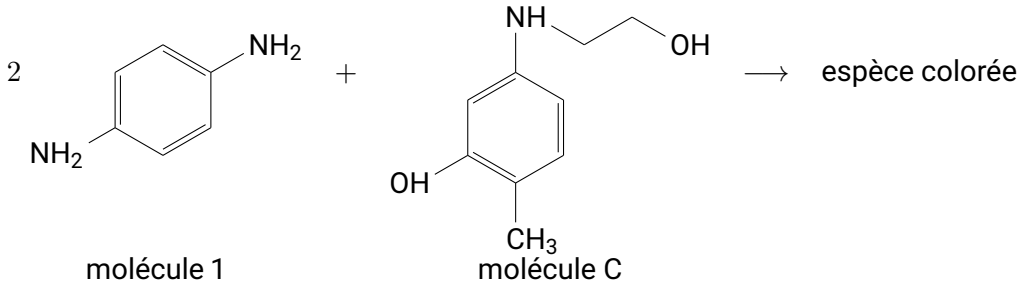
6) Écrire l'équation de la réaction de l'ammoniac $NH_3(aq)$ avec l'eau.

7) Une solution aqueuse d'ammoniac de concentration apportée $c_B = 5{,}0 \times 10^{-2}\,\text{mol·L}^{-1}$ a un pH égal à 11,0. Justifier que l'ammoniac se comporte dans l'eau comme une base faible.

8) Représenter sur un axe gradué en pH les domaines où prédominent NH_4^+ et NH_3, puis y situer le mélange prêt à l'application.

Partie C : la couleur

Une fois la crème et la solution oxydante mélangées, une espèce colorée se forme peu à peu ; c'est elle qui teint le cheveu en s'insérant dans la fibre. Sa formation fait intervenir une molécule appelée coupleur, notée C, selon l'équation simplifiée :



molécule 1 molécule C

La concentration de l'espèce colorée se détermine par spectrophotométrie, la solution suivant la loi de Beer-Lambert si elle est assez diluée. Un programme en langage Python trace l'absorbance A attendue pour des solutions étalons de l'espèce colorée dont la concentration va de $1{,}0\times10^{-6}\,\text{mol·L}^{-1}$ à $2{,}5\times10^{-5}\,\text{mol·L}^{-1}$ (figure 8) ; il affiche aussi la concentration qui correspond à l'absorbance $A = 1{,}20$, mesurée dans les mêmes conditions sur un échantillon du mélange prêt à l'application dilué 200 fois.

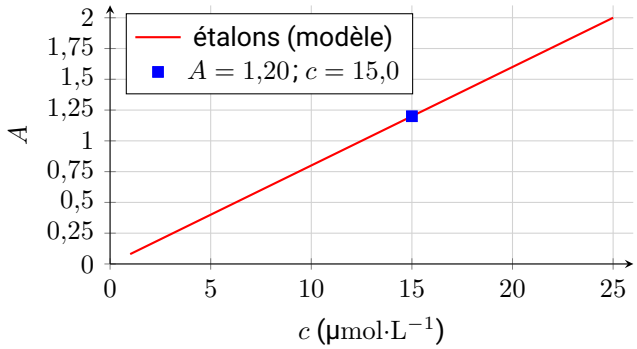


Figure 8 – Absorbance calculée par le programme

Données

- Masse molaire de la molécule C : $M_C = 167\ \text{g·mol}^{-1}$.
- La crème et la solution oxydante ont des masses volumiques voisines de celle de l'eau, $\rho = 1{,}0 \times 10^3\ \text{g·L}^{-1}$.

9) On admet que toute la molécule C apportée a été transformée en espèce colorée. Calculer C_C, concentration de la molécule C apportée dans le mélange prêt à l'application.

10) La réglementation limite la molécule C à $1{,}5\,\%$ en masse dans le mélange prêt à l'application. Cette coloration est-elle conforme ?

Après développement de la couleur, on enregistre le spectre d'absorption du mélange prêt à l'application (figure 9). Sur l'étoile des couleurs (figure 10), deux couleurs complémentaires se font face.

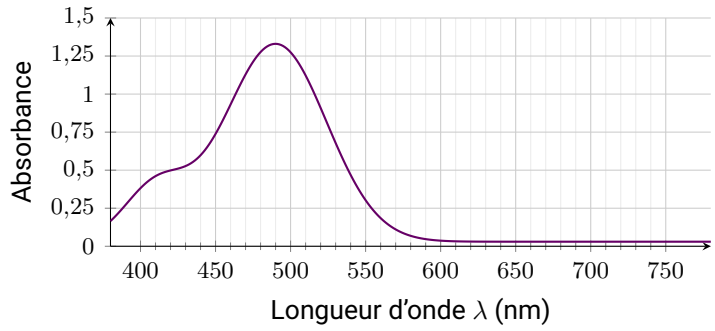


Figure 9 – Spectre du mélange prêt à l'application

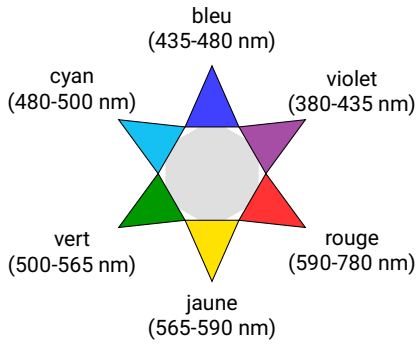


Figure 10 – Étoile des couleurs

11) Quelle couleur le mélange absorbe-t-il le plus ? En déduire la couleur qu'il présente (figures 9 et 10).