Calculatrice autorisée

Exercice 1 : Des protons pour soigner l'œil

5 points

Certaines tumeurs situées au fond de l'œil se soignent par protonthérapie : on dirige sur la tumeur un faisceau de protons très énergétiques, qui y abandonnent l'essentiel de leur énergie en épargnant largement les tissus traversés et le nerf optique. Les protons sont accélérés dans un cyclotron, qu'ils quittent avec une énergie cinétique de $75\,\mathrm{MeV}$.

Un cyclotron (figure 1) comporte deux cavités creuses en forme de demi-disque, appelées zones B et C, de rayon $R_{\max} = 95\,\mathrm{cm}$, séparées par un intervalle étroit, la zone A. Il accélère les particules chargées en combinant l'action d'un champ électrique $\vec{E}$, qui règne dans la zone A, et celle d'un champ magnétique $\vec{B}$, qui règne dans les zones B et C. Le proton étudié est introduit en O avec une vitesse nulle ; on admet que son mouvement obéit aux lois de Newton.

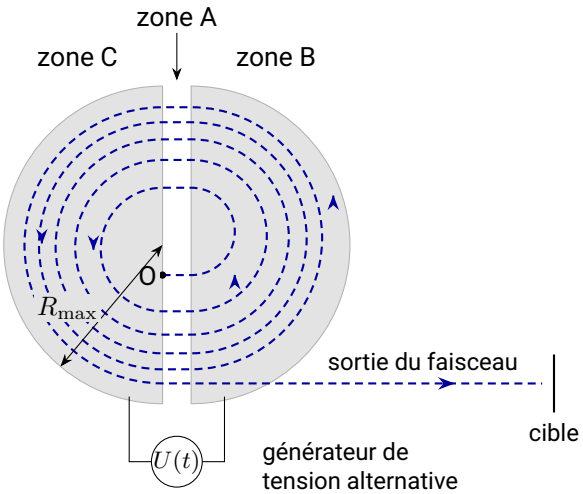


Figure 1 – Cyclotron vu de dessus (sans échelle) ; en pointillés, la trajectoire du proton

Partie A : accélération entre les armatures, de O à M_1

La zone A se comporte comme un condensateur plan, dont les armatures sont soumises à une tension alternative $U(t)$ (figure 2). À l'instant étudié, il y règne un champ électrique $\vec{E}$ uniforme, orienté comme sur la figure 2, de valeur $E = \dfrac{|U|}{d}$.

Le proton part de O à la date $t = 0$, avec une vitesse nulle ; il atteint l'armature opposée en M_1 avec une vitesse de valeur v_1.

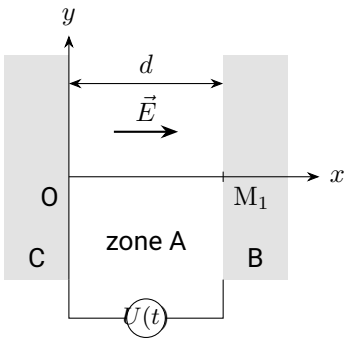


Figure 2 – Modèle de la zone A

Données

- Charge du proton : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$; masse du proton : $m = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$.
- Distance entre les armatures : $d = 1{,}2\,\mathrm{cm}$; tension appliquée : $|U| = 40\,\mathrm{kV}$.

- Entre les armatures, le poids du proton est négligé face à la force $\vec{F}_e$ due au champ électrique ; les positions sont repérées sur les axes $(\mathrm{O}x)$ et $(\mathrm{O}y)$ de la figure 2.
- $1\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

1) Laquelle des deux armatures, celle du côté de la zone C ou celle du côté de la zone B, porte des charges positives à l'instant représenté sur la figure 2 ? Justifier.

2) Le système {proton} est étudié dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. À l'aide de la deuxième loi de Newton, établir l'expression de l'accélération $\vec{a}$ du proton entre les armatures, à l'aide de e, m et $\vec{E}$. Préciser ensuite la direction, le sens et la valeur de ce vecteur, et conclure sur la nature du mouvement.

3) On note ici U la valeur absolue de la tension. Établir que, sur le trajet de O à M_1, le travail de $\vec{F}_e$ s'écrit :

$$W_{\mathrm{OM}_1}(\vec{F}_e) = e\,U$$

4) À l'aide d'un bilan d'énergie, montrer que la vitesse du proton en M_1 a pour valeur $v_1 = \sqrt{\dfrac{2\,e\,U}{m}}$, puis la calculer.

Partie B : demi-tour en zone B, de M_1 à N_1

En M_1, le proton pénètre en zone B avec la vitesse $\vec{v}_1$. Il n'y règne qu'un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme. Le proton y est soumis à son poids et à une force magnétique $\vec{F}_m$, toujours perpendiculaire à sa vitesse, de valeur $F_m = e\,v\,B$, où v est la valeur de la vitesse du proton.
Dans la zone B, le proton décrit un demi-cercle de centre C_1 et de rayon $R_1 = \mathrm{C}_1\mathrm{P}_1$ (figure 3).

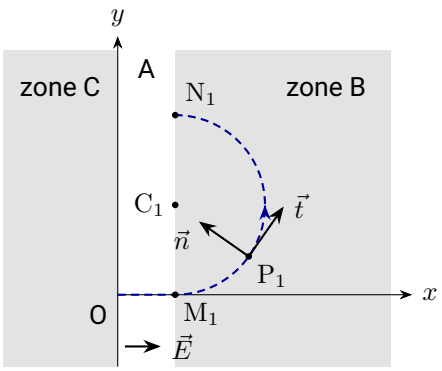


Figure 3 – Trajectoire dans les zones A et B

Données

- Rayon du demi-cercle : $R_1 = 2{,}1\,\mathrm{cm}$; la valeur de la vitesse reste égale à $v = 2{,}8 \times 10^6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ sur ce demi-cercle.
- Valeur du champ magnétique dans les zones B et C : $B = 1{,}4\,\mathrm{T}$ (le tesla, de symbole T, est l'unité de champ magnétique).
- Intensité de la pesanteur : $g = 9{,}8\,\mathrm{N{\cdot}kg^{-1}}$; l'étude dans la zone B se fait dans le repère de Frenet $(\mathrm{P}_1, \vec{t}, \vec{n})$.

5) Vérifier que, dans la zone B, la force magnétique l'emporte de très loin sur le poids du proton.

6) Quel type de mouvement le proton effectue-t-il entre M_1 et N_1 ? Justifier brièvement. Donner ensuite, dans le repère de Frenet, l'expression littérale de l'accélération $\vec{a}$ au point P_1, puis calculer sa valeur a.

Partie C : nouveau passage dans la zone A, puis sortie

7) En N_1, le proton revient dans la zone A, qu'il traverse cette fois de la zone B vers la zone C. Expliquer pourquoi le champ électrique doit alors avoir changé de sens pour que le proton soit de nouveau accéléré, et indiquer comment ce changement de sens est obtenu dans un cyclotron.

Données

- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00 \times 10^8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; une particule est dite relativiste lorsque sa vitesse dépasse $10\,\%$ de c.
- Sur un demi-cercle de rayon R parcouru dans la zone B ou dans la zone C, la valeur de la vitesse du proton est $v = \dfrac{e\,R\,B}{m}$.

8) Le proton est-il relativiste à la sortie du cyclotron ? Justifier par un calcul.

9) Calculer le rayon du dernier demi-cercle parcouru par le proton avant sa sortie. Commenter ce résultat au regard des caractéristiques du cyclotron données au début de l'exercice.

Exercice 2 : Des molécules qui interfèrent

5 points

Les interférences sont la signature d'un comportement ondulatoire. On les observe couramment avec la lumière ; on a pourtant montré qu'elles se produisent aussi avec des particules de matière en mouvement : électrons, atomes et même grosses molécules. Cet exercice étudie d'abord les interférences obtenues avec un réseau éclairé par un laser, puis une expérience d'interférences réalisée avec des molécules.

Partie A : interférences lumineuses produites par un réseau

Un réseau est une lame percée d'un grand nombre de fentes fines, parallèles et équidistantes ; la distance a entre deux fentes voisines est le pas du réseau. Éclairé par un laser de longueur d'onde λ, chaque fente diffracte la lumière, et les ondes issues de toutes les fentes se recouvrent sur un écran placé à la distance D du réseau. On y observe des taches lumineuses régulièrement espacées, aux endroits où les interférences sont constructives.
On note L l'écart entre les milieux de la tache centrale et de la tache la plus proche, et α l'angle défini sur la figure 4. On admet que $\sin\alpha = \dfrac{\lambda}{a}$.

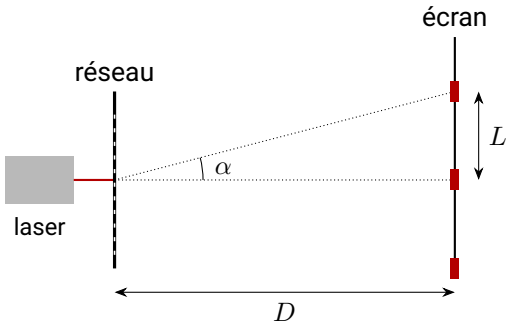


Figure 4 – Dispositif vu de dessus (sans échelle)

1) Deux ondes lumineuses cohérentes se superposent en un point de l'écran. À quelle condition les interférences y sont-elles constructives ?

2) Lorsque l'angle α, exprimé en radian, est petit, on peut écrire $\sin\alpha \approx \alpha$ et $\tan\alpha \approx \alpha$. En déduire, dans ce cas, la relation 1 : $L = \dfrac{\lambda\,D}{a}$.

3) Le laser est remplacé par une source de lumière blanche : la tache centrale est blanche, les taches voisines sont irisées. Dans la première tache latérale, quelle couleur, du bleu ou du rouge, se trouve du côté de la tache centrale ? Justifier sans calcul en s'appuyant sur la relation 1.

Partie B : interférences de molécules

Une équipe de chercheurs a obtenu une figure d'interférences avec des molécules d'une phtalocyanine fluorée, de formule $C_{32}H_2F_{16}N_8$, colorant capable d'émettre de la lumière par fluorescence. Dans une enceinte où règne un vide très poussé (figure 5), l'échantillon est chauffé et vaporisé : il en sort un jet horizontal de molécules qui se déplacent selon l'axe (Ox), à des vitesses très dispersées, de quelques dizaines à plusieurs centaines de $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Les molécules franchissent une fente horizontale, traversent un réseau de pas $a = 80\,\mathrm{nm}$, puis se fixent sur une plaque transparente qui sert d'écran. Éclairées par une lumière appropriée, elles deviennent fluorescentes ; une caméra enregistre alors leurs positions sur l'écran.

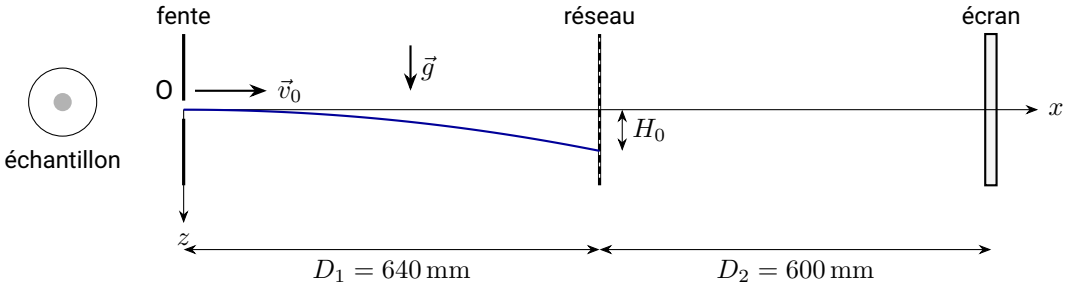


Figure 5 – Dispositif vu de côté (sans échelle, la chute est très exagérée)

Mouvement d'une molécule entre la fente et le réseau. Une molécule de masse m quitte la fente en O à la date $t = 0$; sa vitesse initiale $\vec{v}_0$ est horizontale. Dans le vide, elle n'est soumise qu'à son poids. Le mouvement est étudié dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen, et l'axe (Oz) est vertical et orienté vers le bas. Les équations horaires, admises, s'écrivent : $x(t) = v_0\,t$; $z(t) = \dfrac{1}{2}\,g\,t^2$.

Données

- Constante d'Avogadro : $N_\mathrm{A} = 6{,}02 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$; constante de Planck : $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}$.
- Intensité de la pesanteur : $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$; masse molaire de la phtalocyanine fluorée : $M = 802{,}4\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$.

4) Donner l'expression de l'instant t_1 où la molécule arrive sur le réseau, en fonction de D_1 et v_0. Exprimer alors la hauteur de chute H_0 (figure 5) à l'aide de v_0, D_1 et g ; calculer sa valeur pour $v_0 = 1{,}2 \times 10^2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

5) Comment la hauteur de chute H_0 varie-t-elle quand la vitesse initiale v_0 augmente ? Justifier brièvement.

Figure d'interférences. Après un enregistrement suffisamment long, la caméra fournit la figure 6 : les franges s'écartent les unes des autres vers le bas de l'écran. La figure 7 donne l'intensité de fluorescence relevée le long de la droite (Δ), où arrivent les molécules de vitesse $v_0 = 1{,}2 \times 10^2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

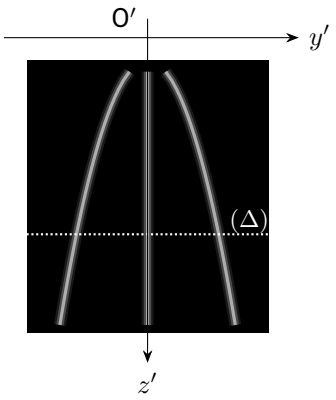


Figure 6 – Image enregistrée

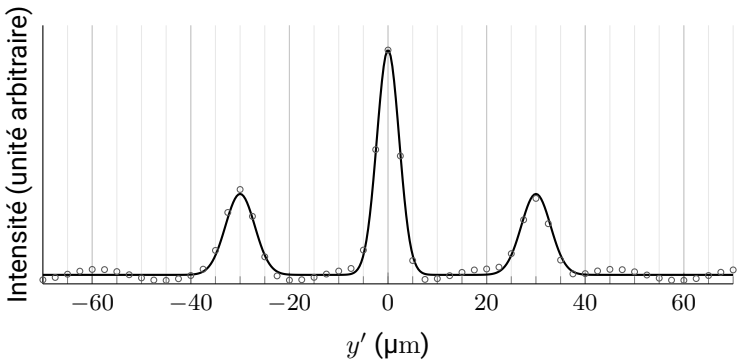


Figure 7 – Intensité de fluorescence le long de (Δ)

6) Vérifier, à l'aide des données, qu'une molécule de ce colorant a pour masse $m = 1{,}33 \times 10^{-24}\,\text{kg}$.

Onde associée à une particule. À une particule de masse m animée d'une vitesse de valeur v, on associe une onde de longueur d'onde $\lambda_{\text{DB}} = \dfrac{h}{m\,v}$, appelée longueur d'onde de de Broglie (h est la constante de Planck).

7) Calculer λ_{DB} pour une molécule de colorant se déplaçant à $v_0 = 1{,}2 \times 10^2\,\text{m·s}^{-1}$.

8) Comment λ_{DB} évolue-t-elle lorsque la molécule va plus vite ? Justifier brièvement.

9) Pour les molécules de vitesse $v_0 = 1{,}2 \times 10^2\,\text{m·s}^{-1}$, on note L_0 l'écart entre la frange centrale et l'une des deux franges qui l'encadrent. Déterminer L_0 à partir de la figure 7, puis le calculer en appliquant la relation 1 au dispositif de la figure 5. Comparer les deux valeurs.

10) Justifier qualitativement, sans calcul, que l'écart entre les franges grandit vers le bas de l'image (figure 6).

Exercice 3 : La glycine, un acide aminé à double visage

5 points

La glycine, de formule $H_2N - CH_2 - COOH$, est le plus simple des acides aminés qui constituent les protéines. On la trouve dans des compléments alimentaires, et les laboratoires de biologie l'utilisent pour préparer des solutions de pH contrôlé. En solution aqueuse, son groupe amino peut capter un ion hydrogène H^+ et son groupe carboxyle peut en céder un : la glycine existe ainsi sous trois formes, notées comme dans le tableau ci-dessous.

forme cationique	forme neutre (amphion)	forme anionique
$^+H_3N - CH_2 - COOH$ notée $GlyH_2^+$	$^+H_3N - CH_2 - COO^-$ notée GlyH	$H_2N - CH_2 - COO^-$ notée Gly^-

Données

- $pK_{A1}(GlyH_2^+/GlyH) = 2{,}4$; $pK_{A2}(GlyH/Gly^-) = 9{,}6$ (à $25\,°C$).
- Numéros atomiques : $Z(H) = 1$; $Z(C) = 6$; $Z(N) = 7$; $Z(O) = 8$.
- Concentration standard : $c^\circ = 1\,\text{mol·L}^{-1}$.

1) Établir le schéma de Lewis de la forme non ionisée de la glycine, $H_2N - CH_2 - COOH$ (c'est cette forme que l'on représente ici, et non l'amphion du tableau).

2) Écrire l'équation de la réaction entre la forme cationique $GlyH_2^+$ et l'eau.
3) Montrer, en justifiant avec précision, qu'il s'agit d'une réaction acide-base.
4) Exprimer K_{A1}, constante d'acidité du couple $GlyH_2^+$/GlyH, puis calculer sa valeur.
5) Expliquer pourquoi la forme GlyH est qualifiée d'espèce amphotère.
6) Tracer le diagramme de prédominance des trois formes de la glycine.
7) Le pH du plasma sanguin vaut $7{,}4$. Quelle forme de la glycine y prédomine ? Justifier.

Un technicien prépare un volume $V = 100{,}0\,\text{mL}$ d'une solution de chlorhydrate de glycine (solide ionique formé d'ions $GlyH_2^+$ et d'ions chlorure Cl^-), de concentration en soluté apporté $c = 4{,}0 \times 10^{-2}\,\text{mol·L}^{-1}$. Le pH de la solution obtenue vaut $1{,}97$. Les ions chlorure sont spectateurs, et l'on ne tient compte que de la réaction écrite à la question 2.

8) Déterminer la quantité de matière de chacune des espèces présentes dans la solution à l'état final, l'eau exceptée. On pourra s'aider d'un tableau d'avancement.
9) Calculer le taux d'avancement final de la réaction entre $GlyH_2^+$ et l'eau.
10) L'ion $GlyH_2^+$ est-il un acide fort ou un acide faible dans l'eau ? Justifier.

Exercice 4 : Stocker l'électricité dans des cuves

5 points

Les éoliennes et les panneaux photovoltaïques produisent de façon irrégulière : il faut pouvoir mettre en réserve l'énergie électrique produite en excès pour la restituer aux heures de forte demande. Les batteries à circulation, dites « à flux », sont une des solutions étudiées pour stocker de grandes quantités d'énergie.

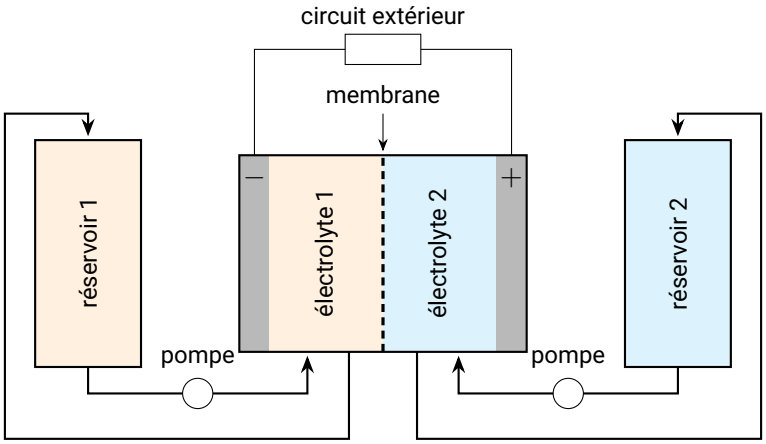


Figure 8 – Batterie à flux en fonctionnement de pile (décharge)

Une batterie à flux (figure 8) comprend :

- deux réservoirs contenant des solutions aqueuses, appelées électrolytes, que des pompes font circuler à travers une cellule électrochimique ;
- une cellule électrochimique, siège de réactions d'oxydoréduction, qui fonctionne comme une pile pendant la décharge et comme un électrolyseur pendant la recharge ;
- une membrane qui sépare les deux électrolytes sans qu'ils se mélangent, mais que les ions hydrogène H^+ peuvent traverser, ce qui assure le passage du courant dans la cellule.

Dans la batterie étudiée, les deux électrolytes contiennent des ions du vanadium. Les couples oxydant-réducteur mis en jeu sont $VO_2^+(aq)/VO^{2+}(aq)$ et $V^{3+}(aq)/V^{2+}(aq)$. Pendant la décharge, la transformation qui a lieu dans la cellule est modélisée par l'équation :

$$VO_2^+(aq) + V^{2+}(aq) + 2\,H^+(aq) \longrightarrow VO^{2+}(aq) + V^{3+}(aq) + H_2O\,(l)$$

1) Écrire les équations des réactions électrochimiques qui ont lieu aux deux électrodes pendant la décharge.

2) Parmi les réactifs de la transformation, identifier l'oxydant. Justifier.

3) À l'aide des polarités indiquées sur la figure 8, déterminer lequel des deux électrolytes, numéro 1 ou numéro 2, renferme les ions VO_2^+, en justifiant.

4) Dans quel sens les ions H^+ traversent-ils la membrane pendant la décharge ? Justifier.

Données

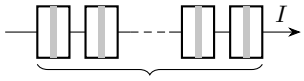
- Constante de Faraday : $\mathcal{F} = 9{,}65 \times 10^4\ \mathrm{C\cdot mol^{-1}}$; c'est la valeur absolue de la charge électrique d'une mole d'électrons.
- Une puissance P correspond à une énergie E transférée pendant une durée Δt : $P = \dfrac{E}{\Delta t}$; un générateur de tension U parcouru par un courant constant d'intensité I fournit la puissance $P = U \times I$.

Une cellule fournit, pendant $\Delta t = 4{,}0\ \mathrm{h}$, un courant constant $I = 180\ \mathrm{A}$. Dans chaque électrolyte, la concentration de l'espèce qui réagit (VO_2^+ dans l'un, V^{2+} dans l'autre) vaut $1{,}6\ \mathrm{mol\cdot L^{-1}}$ au début de la décharge.

5) Vérifier que la charge électrique débitée par la cellule pendant cette durée, appelée sa capacité électrique, vaut environ $Q = 2{,}6 \times 10^6\ \mathrm{C}$.

6) Calculer le volume de solution que doit fournir chaque réservoir pour que la cellule fonctionne pendant cette durée. En réalité, seuls $85\,\%$ des électrons que peuvent échanger les réactifs participent au courant : en déduire le volume réellement nécessaire.

Pour obtenir une tension utilisable sur le réseau électrique, on associe en série 30 cellules identiques à la précédente, de tension $1{,}4\ \mathrm{V}$ chacune ; l'ensemble est traversé par le courant $I = 180\ \mathrm{A}$ (figure 9).



30 cellules de $1{,}4\ \mathrm{V}$ en série

Figure 9 – Association des cellules

7) Pour la batterie complète, quel volume de chacune des deux solutions faut-il prévoir pour $4{,}0\ \mathrm{h}$ de décharge ?

8) Un atout de ces batteries est que l'on peut accroître facilement l'énergie stockée. Que suffit-il de modifier pour faire fonctionner la batterie deux fois plus longtemps en délivrant la même puissance, donc sans changer le nombre de cellules ?

Pour être compétitive sur le marché du stockage, une batterie à flux doit offrir une énergie volumique d'au moins $15\ \mathrm{W\cdot h\cdot L^{-1}}$. L'énergie volumique est le quotient de l'énergie délivrée par la batterie (en $\mathrm{W\cdot h}$) par le volume total des deux électrolytes (en L).

9) Calculer la puissance électrique fournie par la batterie. En déduire que l'énergie qu'elle délivre en $4{,}0\ \mathrm{h}$ de fonctionnement est de l'ordre de $3 \times 10^4\ \mathrm{W\cdot h}$.

10) La batterie étudiée est-elle compétitive ? Justifier.