Exercice 1 : Un arbre d'argent sur un fil de cuivre

5 points

1) Un oxydant est une espèce capable de capter un ou plusieurs électrons. L'ion argent en capte un pour devenir de l'argent métallique :

$$\mathrm{Ag^+(aq) + e^- \longrightarrow Ag(s)}$$

Le cuivre, lui, cède des électrons ($\mathrm{Cu(s) \longrightarrow Cu^{2+}(aq) + 2\,e^-}$) : c'est le réducteur. **L'oxydant est l'ion $\mathrm{Ag^+}$(aq).**

2) Le cuivre et l'argent sont des solides : ils n'apparaissent pas dans le quotient de réaction. Avec les concentrations divisées par c°,

$$Q_{r,\mathrm{i}} = \frac{[\mathrm{Cu^{2+}}]_\mathrm{i} / c^\circ}{\left([\mathrm{Ag^+}]_\mathrm{i} / c^\circ\right)^2}$$

La solution de départ ne contient aucun ion cuivre(II) : $[\mathrm{Cu^{2+}}]_\mathrm{i} = 0$, donc $\boxed{Q_{r,\mathrm{i}} = 0}$.

Comme $Q_{r,\mathrm{i}} < K$, le système évolue spontanément dans le **sens direct** de l'équation : des ions $\mathrm{Cu^{2+}}$ se forment et de l'argent métallique se dépose. C'est bien ce que l'on observe : la solution bleuit et le fil se couvre d'un dépôt gris brillant.

3) Quantités initiales des réactifs :

$$n_\mathrm{i}(\mathrm{Cu}) = \frac{m(\mathrm{Cu})}{M(\mathrm{Cu})} = \frac{4{,}0\,\mathrm{g}}{63{,}5\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}} = 6{,}3 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}$$

$$n_\mathrm{i}(\mathrm{Ag^+}) = C\,V = 0{,}15\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}} \times 0{,}160\,\mathrm{L} = 2{,}4 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}$$

Si le cuivre était limitant, l'avancement maximal serait $n_\mathrm{i}(\mathrm{Cu})/1 = 6{,}3 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}$; si ce sont les ions argent, il vaut $n_\mathrm{i}(\mathrm{Ag^+})/2 = 1{,}2 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}$. La plus petite des deux valeurs l'emporte :

$$\frac{n_\mathrm{i}(\mathrm{Ag^+})}{2} = 1{,}2 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol} < \frac{n_\mathrm{i}(\mathrm{Cu})}{1} = 6{,}3 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}$$

donc les **ions argent sont le réactif limitant** (le coefficient 2 de $\mathrm{Ag^+}$ intervient dans la comparaison).

4) Tableau d'avancement (quantités en mol) :

Équation	Avancement	$2\,\mathrm{Ag^+(aq)}$	$\mathrm{Cu(s)}$	$2\,\mathrm{Ag(s)}$	$\mathrm{Cu^{2+}(aq)}$
État initial	0	$C\,V$	$n_\mathrm{i}(\mathrm{Cu})$	0	0
État final réel	x_f	$C\,V - 2\,x_\mathrm{f}$	$n_\mathrm{i}(\mathrm{Cu}) - x_\mathrm{f}$	$2\,x_\mathrm{f}$	x_f
Transformation totale	x_max	$C\,V - 2\,x_\mathrm{max} = 0$	$n_\mathrm{i}(\mathrm{Cu}) - x_\mathrm{max}$	$2\,x_\mathrm{max}$	x_max

Numériquement, pour la transformation totale : $0\,\mathrm{mol}$ d'ions argent, $5{,}1 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}$ de cuivre, $2{,}4 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}$ d'argent et $1{,}2 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}$ d'ions cuivre(II).

5) *Avancement maximal.* Les ions argent étant limitants, $C\,V - 2\,x_{\max} = 0$, d'où

$$x_{\max} = \frac{C\,V}{2} = \frac{2{,}4 \times 10^{-2}\,\text{mol}}{2} = 1{,}2 \times 10^{-2}\,\text{mol}.$$

Avancement final. D'après le tableau, $n_{\text{f}}(\text{Cu}^{2+}) = x_{\text{f}}$; le volume de la solution ne change pas, donc

$$x_{\text{f}} = [\text{Cu}^{2+}]_{\text{f}} \times V = 7{,}5 \times 10^{-2}\,\text{mol·L}^{-1} \times 0{,}160\,\text{L} = 1{,}2 \times 10^{-2}\,\text{mol}.$$

Taux d'avancement final.

$$\tau = \frac{x_{\text{f}}}{x_{\max}} = \frac{1{,}2 \times 10^{-2}\,\text{mol}}{1{,}2 \times 10^{-2}\,\text{mol}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\tau = 1{,}0}$$

La transformation est **totale** : tous les ions argent ont été réduits. C'est cohérent avec la valeur très élevée de K (bien supérieure à 10^4).

Exercice 2 : Un canon à électrons

8 points

Partie A : étude par la deuxième loi de Newton

1) Le poids a pour valeur

$$P = m\,g = 9{,}11 \times 10^{-31}\,\text{kg} \times 9{,}81\,\text{m·s}^{-2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{P = 8{,}94 \times 10^{-30}\,\text{N}}$$

2) La charge de l'électron vaut $q = -e$; la force électrique a pour valeur $F = |q|\,E = e\,E$, avec $E = \dfrac{U}{d}$:

$$E = \frac{120\,\text{V}}{4{,}0 \times 10^{-2}\,\text{m}} = 3{,}0 \times 10^{3}\,\text{V·m}^{-1}$$

$$F = \frac{e\,U}{d} = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\text{C} \times 3{,}0 \times 10^{3}\,\text{V·m}^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{F = 4{,}8 \times 10^{-16}\,\text{N}}$$

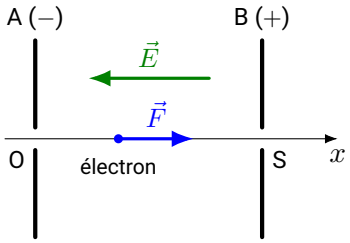
3) On compare les deux forces par leur rapport :

$$\frac{F}{P} = \frac{4{,}8 \times 10^{-16}\,\text{N}}{8{,}94 \times 10^{-30}\,\text{N}} \approx 5 \times 10^{13}$$

La force électrique est environ cinquante mille milliards de fois plus intense que le poids : **le poids est négligeable**, et l'électron peut être considéré comme soumis à la seule force électrique.

4)

- Entre deux plaques chargées, le champ $\vec{E}$ est perpendiculaire aux plaques et pointe vers la plaque chargée négativement : ici **de B vers A**, dans le sens des x décroissants.
- $\vec{F} = q\,\vec{E} = -e\,\vec{E}$: la charge étant négative, $\vec{F}$ est portée par la même droite que $\vec{E}$, en sens contraire, donc **de A vers B**. L'électron est attiré par la plaque positive : il est accéléré vers S.



5) **Deuxième loi de Newton** appliquée au système {électron}, de masse constante, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, le poids étant négligé :

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \quad \Longleftrightarrow \quad -e\,\vec{E} = m\,\vec{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} = -\frac{e}{m}\,\vec{E}$$

Le champ est dirigé suivant $-x$: ses coordonnées sont $E_x = -E$ et $E_y = 0$. En projetant :

$$\boxed{a_x = \frac{e\,E}{m} \qquad a_y = 0}$$

6) Les coordonnées de la vitesse sont des primitives de celles de l'accélération : $v_x(t) = \dfrac{e\,E}{m}\,t + K_1$ et $v_y(t) = K_2$. À $t = 0$, la vitesse est nulle, donc $K_1 = K_2 = 0$:

$$v_x(t) = \frac{e\,E}{m}\,t \qquad v_y(t) = 0.$$

Les coordonnées de la position sont à leur tour des primitives de celles de la vitesse : $x(t) = \dfrac{e\,E}{2\,m}\,t^2 + K_3$ et $y(t) = K_4$. À $t = 0$, l'électron est en O : $K_3 = K_4 = 0$.

$$\boxed{x(t) = \frac{e\,E}{2\,m}\,t^2 \qquad y(t) = 0}$$

Le mouvement est rectiligne, le long de l'axe Ox, et uniformément accéléré.

7) En S, l'électron a parcouru la distance d : $x(t_\mathrm{S}) = d$, soit $\dfrac{e\,E}{2\,m}\,t_\mathrm{S}^2 = d$. La date étant positive,

$$\boxed{t_\mathrm{S} = \sqrt{\frac{2\,m\,d}{e\,E}}} \qquad \text{ou, avec } E = \frac{U}{d}, \quad t_\mathrm{S} = d\sqrt{\frac{2\,m}{e\,U}}.$$

(Numériquement, $t_\mathrm{S} \approx 1{,}2 \times 10^{-8}\ \mathrm{s}$: la traversée dure une dizaine de nanosecondes.)

8) La vitesse en S est $v_\mathrm{S} = v_x(t_\mathrm{S})$, puisque $v_y = 0$ et $v_x > 0$:

$$v_\mathrm{S} = \frac{e\,E}{m}\sqrt{\frac{2\,m\,d}{e\,E}} = \sqrt{\frac{e^2E^2}{m^2} \times \frac{2\,m\,d}{e\,E}} = \sqrt{\frac{2\,e\,E\,d}{m}}$$

Or $E\,d = U$:

$$\boxed{v_\mathrm{S} = \sqrt{\frac{2\,e\,U}{m}}}$$: c'est l'expression annoncée.

Partie B : étude énergétique

9) **Théorème de l'énergie cinétique** appliqué à l'électron entre O et S : la variation de son énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces qu'il subit. Le poids étant négligé, seule la force électrique travaille :

$$E_c(\mathrm{S}) - E_c(\mathrm{O}) = W_{\mathrm{OS}}(\vec{F}).$$

La force $\vec{F}$ est constante et de même sens que le déplacement $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$, de longueur d :

$$W_{\mathrm{OS}}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OS}} = F\times d = e\,E\,d = e\times\frac{U}{d}\times d = e\,U.$$

L'électron part de O sans vitesse : $E_c(\mathrm{O}) = 0$. Donc

$$\boxed{E_c(\mathrm{S}) = e\,U}$$

10) Comme $E_c(\mathrm{S}) = \frac{1}{2}\,m\,v_\mathrm{S}^2$, on obtient $\frac{1}{2}\,m\,v_\mathrm{S}^2 = e\,U$, d'où $v_\mathrm{S}^2 = \dfrac{2\,e\,U}{m}$ et, la vitesse étant positive,

$$\boxed{v_\mathrm{S} = \sqrt{\frac{2\,e\,U}{m}}}$$

On retrouve, beaucoup plus vite, le résultat de la question 8.

11) Application numérique :

$$v_\mathrm{S} = \sqrt{\frac{2\times 1{,}60\times10^{-19}\,\mathrm{C}\times 120\,\mathrm{V}}{9{,}11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}}} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{v_\mathrm{S} = 6{,}49\times10^{6}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

(Les unités : $\mathrm{C}\cdot\mathrm{V} = \mathrm{J}$ et $\mathrm{J\cdot kg^{-1}} = \mathrm{m^2\cdot s^{-2}}$.)

Exercice 3 : Le retour d'un premier étage de fusée

7 points

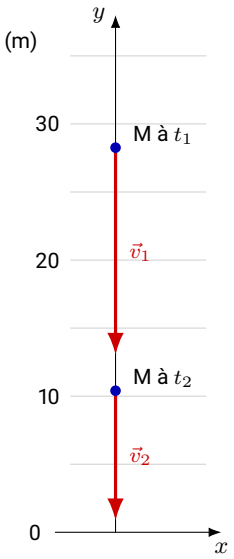
1) La trajectoire étant verticale, seule la coordonnée v_y de la vitesse est non nulle, et la valeur de la vitesse vaut $v = |v_y|$. La droite modélisée sur le graphique 1, $v_y = 3{,}20\,t - 15{,}0$, donne :

- à $t_1 = 0{,}40\,\mathrm{s}$: $v_y(t_1) = 3{,}20\times0{,}40 - 15{,}0 = -13{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, donc $\boxed{v_1 = 13{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$;
- à $t_2 = 2{,}00\,\mathrm{s}$: $v_y(t_2) = 3{,}20\times2{,}00 - 15{,}0 = -8{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, donc $\boxed{v_2 = 8{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

Longueurs des flèches, à raison de $1\,\mathrm{cm}$ pour $5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$:

$$\ell_1 = \frac{13{,}7}{5{,}0} \approx 2{,}7\,\mathrm{cm} \qquad \ell_2 = \frac{8{,}6}{5{,}0} \approx 1{,}7\,\mathrm{cm}$$

v_y est négative aux deux dates : chaque vecteur vitesse est vertical, **dirigé vers le bas** (l'étage descend), et son origine est le point M occupé à cet instant (figure ci-dessous).



2) Le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse : $a_y = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$. Le graphique 1 est une droite : a_y est son coefficient directeur, constant.

$$a_y = 3{,}20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a = 3{,}20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}$$

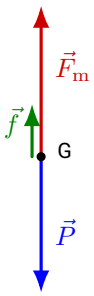
$a_y > 0$: le vecteur accélération est orienté **vers le haut**, alors que la vitesse est orientée vers le bas. Le mouvement est :

- **rectiligne**, car la trajectoire est une portion de droite verticale ;
- **uniformément varié**, car le vecteur accélération est constant ;
- **ralenti**, car $\vec{a}$ pointe à l'opposé de $\vec{v}$: l'étage freine, sa vitesse décroît (de $15{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ à $5{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ entre 0 et $3\,\mathrm{s}$).

Le mouvement est rectiligne uniformément ralenti.

3) Système : le premier étage, de masse constante, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il subit :

- son poids $\vec{P}$, dirigé vers le sol ;
- la poussée $\vec{F}_\mathrm{m}$ due aux gaz éjectés par le moteur, verticale, vers le haut ;
- la force de frottement de l'air $\vec{f}$, opposée au mouvement, donc verticale vers le haut puisque l'étage descend.



La **deuxième loi de Newton** s'écrit $\vec{P} + \vec{F}_\mathrm{m} + \vec{f} = m\,\vec{a}$; projetée sur l'axe ascendant, elle donne $m\,a_y = F_\mathrm{m} + f - P$. Puisque a_y est positive, la résultante pointe vers le haut, ce qui impose $F_\mathrm{m} + f > P$. Sur le schéma, les flèches de $\vec{F}_\mathrm{m}$ et $\vec{f}$ mises bout à bout doivent être plus longues que celle de $\vec{P}$.

4) Le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position : $v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. On obtient y en cherchant la

fonction dont la dérivée est $v_y = 3{,}20\,t - 15{,}0$:

$$y(t) = \frac{3{,}20}{2}\,t^2 - 15{,}0\,t + C = 1{,}60\,t^2 - 15{,}0\,t + C.$$

À $t = 0$, $y(0) = C$. Le graphique 2 donne $y(0) = 34\,\text{m}$ (lecture acceptée entre $33\,\text{m}$ et $35\,\text{m}$), donc $C = 34\,\text{m}$ et

$$\boxed{y(t) = 1{,}60\,t^2 - 15{,}0\,t + 34} \quad \text{(altitude en mètres, date en secondes).}$$

Contrôle sur le graphique 2 : $y(2{,}00\,\text{s}) = 6{,}4 - 30{,}0 + 34 = 10{,}4\,\text{m}$, ce que l'on lit bien.

5) Au contact, l'altitude est nulle : $y(t_\text{f}) = 0$. La date t_f est donc solution de

$$\boxed{1{,}60\,t_\text{f}^2 - 15{,}0\,t_\text{f} + 34 = 0}$$

6) L'étage descend depuis $t = 0$ et l'altitude s'annule pour la première fois à $3{,}84\,\text{s}$: c'est à cette date qu'il touche la plateforme, et le mouvement décrit par le modèle s'arrête là. La seconde solution est postérieure au contact ; on le confirme avec la vitesse :

- $v_y(3{,}84\,\text{s}) = 3{,}20 \times 3{,}84 - 15{,}0 = -2{,}7\,\text{m·s}^{-1}$: négative, l'étage descend encore, c'est cohérent ;
- $v_y(5{,}54\,\text{s}) = 3{,}20 \times 5{,}54 - 15{,}0 = 2{,}7\,\text{m·s}^{-1}$: positive, l'étage serait en train de remonter à travers le sol, ce qui n'a pas de sens physique.

On retient $t_\text{f} = 3{,}84\,\text{s}$, et la valeur de la vitesse au contact est

$$v_\text{f} = |v_y(t_\text{f})| \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_\text{f} \approx 2{,}7\,\text{m·s}^{-1}}$$

7) La composante verticale de la vitesse au contact vaut environ $2{,}7\,\text{m·s}^{-1}$, valeur inférieure à la limite de $6\,\text{m·s}^{-1}$: **l'atterrissage se fait en douceur**. On pouvait s'en douter : à la fin de l'enregistrement, la valeur de la vitesse était déjà passée sous le seuil ($5{,}4\,\text{m·s}^{-1}$) et le freinage se poursuivait.