Exercice 1 : Une maison moins gourmande en énergie

11,5 points

Partie A : isoler un comble

1) Un transfert thermique se fait toujours spontanément du système le plus chaud vers le système le plus froid. L'étage habité ($\theta_2 = 19\,°\text{C}$) est plus chaud que le comble ($\theta_1 = 3{,}0\,°\text{C}$) : l'énergie traverse le plancher **de l'étage habité vers le comble**.

2) Le flux thermique à travers une paroi de résistance thermique R est égal à l'écart de température entre ses deux faces divisé par R :

$$\Phi = \frac{\theta_2 - \theta_1}{R} = \frac{19\,°\text{C} - 3{,}0\,°\text{C}}{6{,}4 \times 10^{-3}\,\text{K·W}^{-1}} = \frac{16\,\text{K}}{6{,}4 \times 10^{-3}\,\text{K·W}^{-1}}, \qquad \boxed{\Phi = 2{,}5 \times 10^{3}\,\text{W}}$$

Un écart de $16\,°\text{C}$ est aussi un écart de $16\,\text{K}$: aucune conversion n'est nécessaire.

3) Le flux thermique est une énergie transférée par unité de temps : $Q = \Phi \times \Delta t$. En gardant Φ en kilowatts et Δt en heures, on obtient directement des kilowattheures :

$$Q = 2{,}5\,\text{kW} \times 24\,\text{h}, \qquad \boxed{Q = 60\,\text{kW·h}}$$

Vérification en joules : $Q = 2{,}5 \times 10^3 \times 24 \times 3600 = 2{,}16 \times 10^8$ J, et $\dfrac{2{,}16 \times 10^8}{3{,}6 \times 10^6} = 60$.

4) Le meilleur isolant est celui qui laisse passer le moins facilement l'énergie thermique, donc celui dont la conductivité thermique λ est la plus petite. Il faut recommander la **mousse de polyuréthane** ($\lambda = 0{,}022\,\text{W·m}^{-1}\text{·K}^{-1}$).

5) Le plancher et la couche d'isolant sont accolés : leurs résistances thermiques s'ajoutent, $R' = R + R_{\text{iso}}$, d'où :

$$R_{\text{iso}} = R' - R = 1{,}0 \times 10^{-1}\,\text{K·W}^{-1} - 6{,}4 \times 10^{-3}\,\text{K·W}^{-1} = 9{,}36 \times 10^{-2}\,\text{K·W}^{-1}$$

$$\boxed{R_{\text{iso}} \approx 9{,}4 \times 10^{-2}\,\text{K·W}^{-1}}$$

Attention aux puissances de dix : $6{,}4 \times 10^{-3} = 0{,}64 \times 10^{-2}$.

6) On isole e dans l'expression de la résistance thermique : $R_{\text{iso}} = \dfrac{e}{\lambda S} \iff e = R_{\text{iso}} \times \lambda \times S$. Avec la valeur non arrondie de R_{iso} :

$$e = 9{,}36 \times 10^{-2}\,\text{K·W}^{-1} \times 0{,}022\,\text{W·m}^{-1}\text{·K}^{-1} \times 60\,\text{m}^2 \approx 0{,}124\,\text{m}, \qquad \boxed{e \approx 0{,}12\,\text{m}}$$

Une épaisseur plus faible donnerait une résistance inférieure à R_{iso} : il faut $e \geqslant 0{,}124\,\text{m}$, donc en pratique des panneaux d'au moins $13\,\text{cm}$.

Partie B : un chauffe-eau solaire

7)

- **Conduction** : il faut un milieu matériel, sans déplacement global de matière (surtout dans les solides). Les particules les plus agitées transmettent, par chocs, une partie de leur agitation à leurs voisines : l'énergie avance de proche en proche.

- **Convection** : il faut un fluide (liquide ou gaz) en mouvement. Des portions de fluide se déplacent en emportant avec elles l'agitation thermique de leurs particules.
- **Rayonnement** : aucun milieu matériel n'est nécessaire, il a lieu même dans le vide. La matière émet et absorbe des ondes électromagnétiques (des photons) : l'énergie émise par l'agitation des particules de la source est absorbée par la matière qui la reçoit.

8)
- Capteur solaire (1) : **rayonnement**, l'énergie du Soleil arrive sous forme d'ondes électromagnétiques.
- Échangeur thermique (3) : **conduction**, l'énergie passe du liquide caloporteur à l'eau à travers la paroi métallique du serpentin, sans mélange des deux liquides.
- Eau du ballon (4) : **convection**, l'eau réchauffée près du serpentin, moins dense, monte et se mélange au reste de l'eau du ballon.

9) La pompe met le liquide en mouvement en exerçant sur lui des forces : elle lui transfère de l'énergie par **travail** (ici à partir d'énergie électrique).

10) L'énergie interne d'un liquide est liée à l'agitation désordonnée de ses particules. Quand la température du liquide caloporteur augmente, cette agitation augmente : **son énergie interne augmente**. Pour un système incompressible sans changement d'état, $\Delta U = m\,c\,\Delta\theta$: ΔU a le signe de $\Delta\theta$, positif ici.

Partie C : de l'eau chaude pour une tisane

11) Masse d'eau : $m = \rho_{\text{eau}} \times V = 1{,}00\,\text{kg·L}^{-1} \times 0{,}350\,\text{L} = 0{,}350\,\text{kg}$ (on convertit $V = 350\,\text{mL} = 0{,}350\,\text{L}$).

Pour l'eau liquide, système incompressible sans changement d'état :

$$\Delta U = m \times c_{\text{eau}} \times (\theta_{\text{f}} - \theta_{\text{i}}) = 0{,}350\,\text{kg} \times 4\,180\,\text{J·kg}^{-1}\text{·K}^{-1} \times 70\,\text{K} = 102\,410\,\text{J}, \qquad \boxed{\Delta U \approx 1{,}0 \times 10^5\,\text{J}}$$

12) L'énergie fournie par le four pendant Δt vaut $E = P \times \Delta t$. Toute cette énergie est reçue par l'eau : $P \times \Delta t = \Delta U$, d'où, avec la valeur non arrondie de ΔU :

$$\Delta t = \frac{\Delta U}{P} = \frac{102\,410\,\text{J}}{800\,\text{W}} \approx 128\,\text{s}, \qquad \boxed{\Delta t \approx 1{,}3 \times 10^2\,\text{s}}$$

soit un peu plus de deux minutes.

Partie D : attendre que la tisane refroidisse

13) **Premier principe** appliqué au système {eau du bol}, entre les dates t et $t + \Delta t$: $\Delta U = W + Q$. Le système est incompressible et ne reçoit aucun travail : $W = 0$, donc $\Delta U = Q$.

Variation d'énergie interne : pour un système incompressible, $\Delta U = m\,c\,\Delta\theta$, où $\Delta\theta$ est la variation de température pendant Δt.

Transfert thermique : pendant une durée Δt assez courte pour que le flux soit constant, $Q = \Phi \times \Delta t = h\,S\,(\theta_{\text{a}} - \theta)\,\Delta t$ (loi de Newton).

En égalant les deux expressions : $m\,c\,\Delta\theta = h\,S\,(\theta_\text{a} - \theta)\,\Delta t$, soit $\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{h\,S}{m\,c}\,(\theta_\text{a} - \theta)$.

Quand Δt tend vers 0, $\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ tend vers la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{h\,S}{m\,c}\,\theta + \frac{h\,S}{m\,c}\,\theta_\text{a}}$$

Ici $\theta > \theta_\text{a}$: la dérivée est négative et la température diminue, comme attendu.

14) On cherche la date t_1 telle que $\theta(t_1) = 60\,^\circ\text{C}$:

$$63\,\mathrm{e}^{-t_1/750} + 22 = 60 \iff \mathrm{e}^{-t_1/750} = \frac{60-22}{63} = \frac{38}{63} \iff -\frac{t_1}{750} = \ln\left(\frac{38}{63}\right)$$

$$t_1 = 750 \times \ln\left(\frac{63}{38}\right)$$

$$t_1 \approx 750 \times 0{,}506 \approx 379\,\text{s}, \qquad \boxed{t_1 \approx 3{,}8 \times 10^2\,\text{s}}$$

soit environ 6 minutes et 20 secondes. On vérifie la cohérence de l'expression : $\theta(0) = 63 + 22 = 85\,^\circ\text{C}$ (sortie du four) et θ tend vers $22\,^\circ\text{C}$ (air de la cuisine).

15) La tisane refroidit plus vite que prévu : le modèle sous-estime les pertes. Explications possibles (une suffit) :

- le modèle ne retient que l'échange convectif avec l'air ; or l'eau cède aussi de l'énergie au bol par conduction (le bol, plus froid au départ, n'est pas dans le système) et rayonne vers la pièce ;
- une partie de l'eau s'évapore : le système perd de la matière (il n'est plus fermé), et l'évaporation prélève beaucoup d'énergie à l'eau restante ;
- h n'est pas constant : un courant d'air, ou le fait de remuer la tisane, augmente les échanges.

Exercice 2 : Le badge sans contact de la cantine

8,5 points

1) Dans le circuit extérieur au générateur, le courant circule de son pôle $+$ vers son pôle $-$: il passe dans R, puis atteint l'armature supérieure du condensateur. Cette armature se charge positivement ($+q$), l'autre négativement ($-q$). En convention récepteur, chaque flèche de tension est dirigée en sens contraire du courant dans le dipôle.

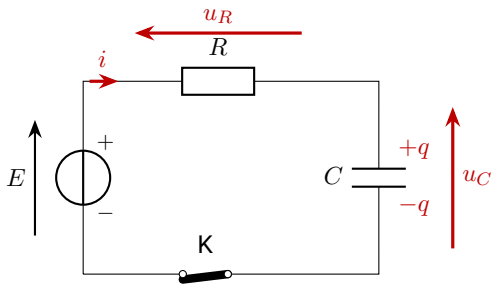


Figure 1 complétée (partie A ; ajouts en rouge)

2) Avec le sens de i choisi (le courant arrive sur l'armature qui porte q) :

$$\boxed{i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}} \quad \text{et} \quad \boxed{q = C \times u_C}$$

i en ampères (A), q en coulombs (C), t en secondes (s), C en farads (F), u_C en volts (V).

3) **Loi des mailles**, interrupteur fermé : $E = u_R + u_C$. **Loi d'Ohm** (convention récepteur) : $u_R = R\,i$.

C est constante, donc $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(C\,u_C)}{\mathrm{d}t} = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. En remplaçant :

$$E = RC\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}\,u_C + \frac{E}{RC}}$$

(on a divisé les deux membres par RC).

4) On dérive $u_C(t) = E - E\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$: $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -E \times \left(-\dfrac{1}{\tau}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau} = \dfrac{E}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

Membre de droite de l'équation, avec $RC = \tau$:

$$-\frac{1}{\tau}\left(E - E\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right) + \frac{E}{\tau} = -\frac{E}{\tau} + \frac{E}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E}{\tau} = \frac{E}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

On retrouve la même expression des deux côtés, quel que soit t : l'équation est vérifiée. Elle vérifie de plus $u_C(0) = E(1-1) = 0$, condensateur initialement déchargé.

5) Pour une durée de charge très grande devant τ, le terme $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ devient négligeable : **la limite de u_C est E**. Graphiquement, la courbe s'approche d'une asymptote horizontale (en tirets rouges ci-dessous), d'ordonnée $5{,}0\,\mathrm{V}$: $\boxed{E = 5{,}0\,\mathrm{V}}$ (lecture à $0{,}1\,\mathrm{V}$ près).

6) Une résistance est un rapport tension sur intensité ($R = u_R/i$) : $[R] = [U]\,[I]^{-1}$. Une charge est une intensité multipliée par une durée ($i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$), et une capacité est une charge divisée par une tension ($C = q/u_C$) : $[C] = [I]\,[T]\,[U]^{-1}$. Le produit vaut donc :

$$[\tau] = [R]\,[C] = [U]\,[I]^{-1} \times [I]\,[T]\,[U]^{-1} = [T]$$

La constante τ a la dimension d'un temps ; son unité SI est la seconde.

7) À la date τ : $u_C(\tau) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) \approx 0{,}63\,E = 0{,}632 \times 5{,}0\,\mathrm{V} \approx 3{,}2\,\mathrm{V}$. On trace l'horizontale $u_C = 0{,}63\,E \approx 3{,}2\,\mathrm{V}$; elle coupe la courbe en un point dont on lit l'abscisse (construction en bleu ci-dessous) :

$$\boxed{\tau \approx 6{,}8\,\mathrm{s}}$$

Tolérance : avec une lecture de u_C à $0{,}1\,\mathrm{V}$ près, on trouve une valeur entre $6{,}4\,\mathrm{s}$ et $7{,}2\,\mathrm{s}$. *Autre méthode* : la tangente à l'origine coupe l'asymptote $u_C = E$ à la date $t = \tau$.

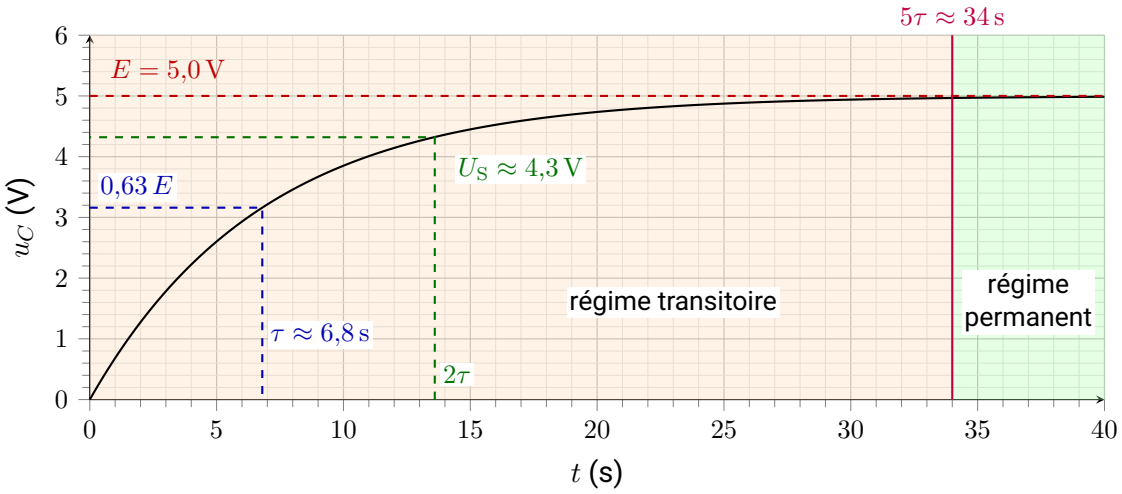


Figure 2 complétée (questions 5, 7, 10 et 11)

8) $\tau = R\,C$, donc, avec $R = 680\,\text{k}\Omega = 6{,}80 \times 10^5\,\Omega$:

$$C = \frac{\tau}{R} = \frac{6{,}8\,\text{s}}{6{,}80 \times 10^5\,\Omega}, \qquad \boxed{C \approx 1{,}0 \times 10^{-5}\,\text{F} = 10\,\mu\text{F}}$$

(une lecture de τ entre $6{,}4\,\text{s}$ et $7{,}2\,\text{s}$ donne C entre $9{,}4\,\mu\text{F}$ et $11\,\mu\text{F}$). Le microfarad est un ordre de grandeur **courant** pour les condensateurs utilisés en électronique.

9) $u_C(5\tau) = E\left(1 - \text{e}^{-5\tau/\tau}\right) = E\left(1 - \text{e}^{-5}\right) = E\,(1 - 0{,}0067) \approx 0{,}99\,E$.

10) À la date $5\tau \approx 5 \times 6{,}8\,\text{s} = 34\,\text{s}$, u_C ne diffère plus de E que de 1 % environ, écart que l'on ne distingue plus sur le graphique : on considère le condensateur chargé. On trace la droite verticale $t = 5\tau$ (en violet sur la figure 2 complétée) :

- avant 5τ, u_C augmente, le condensateur se charge : c'est le **régime transitoire** ;
- après 5τ, u_C reste pratiquement égale à E et le courant est quasi nul : c'est le **régime permanent** (ou stationnaire).

11)

- À la date $2\tau \approx 13{,}6\,\text{s}$, on lit sur la courbe (construction en vert) : $\boxed{U_\text{S} \approx 4{,}3\,\text{V}}$ (lecture à $0{,}1\,\text{V}$ près).
- La charge **n'est pas terminée** : à cette date, $u_C = E\left(1 - \text{e}^{-2}\right) \approx 0{,}86\,E$; il manque encore environ 14 % de la tension finale.
- Non, ce délai n'est **pas acceptable** : un élève devrait attendre plus d'une dizaine de secondes ($2\tau \approx 14\,\text{s}$) le badge contre la borne, et la file s'allongerait à chaque passage, alors que le texte exige une identification quasi immédiate. Le montage reproduit le fonctionnement du badge, pas sa rapidité : pour réduire $2\tau = 2RC$, le circuit réel associe une résistance et une capacité beaucoup plus petites.