Exercice 1 : Contrôle d'un détartrant à l'acide chlorhydrique

8 points

1) On raisonne sur un volume $V = 1{,}00\,\text{L}$ de solution commerciale.

- Sa masse est $m(\text{solution}) = \rho\, V = 1{,}10 \times 10^3\,\text{g·L}^{-1} \times 1{,}00\,\text{L} = 1{,}10 \times 10^3\,\text{g}$.
- Elle renferme $m(\text{HCl}) = w \times m(\text{solution}) = 0{,}20 \times 1{,}10 \times 10^3\,\text{g} = 2{,}2 \times 10^2\,\text{g}$ de chlorure d'hydrogène,
- soit une quantité de matière $n(\text{HCl}) = \dfrac{m(\text{HCl})}{M(\text{HCl})} = \dfrac{220\,\text{g}}{36{,}5\,\text{g·mol}^{-1}} = 6{,}03\,\text{mol}$ (valeur non arrondie gardée pour la suite).

Le chlorure d'hydrogène réagit totalement avec l'eau ($\text{HCl} + \text{H}_2\text{O} \longrightarrow \text{H}_3\text{O}^+ + \text{Cl}^-$) : chaque molécule HCl dissoute fournit un ion H_3O^+, donc $n(\text{H}_3\text{O}^+) = n(\text{HCl})$. En littéral, $C_\text{a} = \dfrac{w\,\rho}{M(\text{HCl})}$, et

$$C_\text{a} = \frac{n(\text{H}_3\text{O}^+)}{V} = \frac{6{,}03\,\text{mol}}{1{,}00\,\text{L}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{C_\text{a} \approx 6{,}0\,\text{mol·L}^{-1}}$$

ce qui correspond bien à environ $6\,\text{mol·L}^{-1}$.

2) Les ions oxonium (acide) cèdent un ion H^+ aux ions hydroxyde (base) ; la réaction est totale et rapide :

$$\boxed{\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq}) + \text{HO}^-(\text{aq}) \longrightarrow 2\,\text{H}_2\text{O}\,(\text{l})}$$

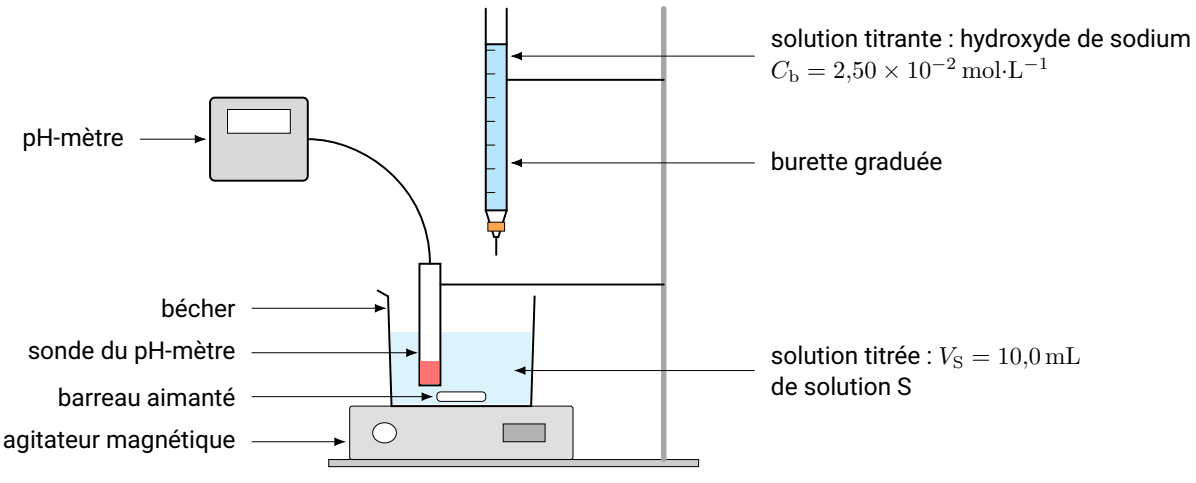
Les ions Na^+ et Cl^- ne participent pas à la réaction (ions spectateurs).

3) Diluer 200 fois signifie que le volume de la solution préparée est 200 fois plus grand que le volume prélevé : le facteur de dilution est $F = \dfrac{C_\text{a}}{C_\text{S}} = \dfrac{V_\text{fiole}}{V_0} = 200$ (la quantité d'ions oxonium prélevée se retrouve entièrement dans la fiole : $C_\text{a}\,V_0 = C_\text{S}\,V_\text{fiole}$). Donc

$$V_0 = \frac{V_\text{fiole}}{F} = \frac{500{,}0\,\text{mL}}{200} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{V_0 = 2{,}50\,\text{mL}}$$

On prélève ce volume avec une pipette graduée et on complète la fiole jaugée de $500{,}0\,\text{mL}$ avec de l'eau distillée.

4) Montage légendé :



La solution titrante (hydroxyde de sodium, de concentration connue) est dans la burette ; la solution titrée ($10{,}0\,\text{mL}$ de solution S) est dans le bécher.

5) Démarche. On lit le volume équivalent sur le document, on en déduit C_S par la relation d'équivalence, puis C_a en tenant compte de la dilution, et l'on compare à la question 1.

- *Volume équivalent.* À l'équivalence, le pH varie le plus vite : la dérivée $\dfrac{\text{d pH}}{\text{d}V_\text{b}}$ passe par son maximum. Son pic est à $V_\text{E} = 12{,}0\,\text{mL}$ (lecture acceptée de $11{,}8\,\text{mL}$ à $12{,}2\,\text{mL}$).
- *Relation à l'équivalence.* D'après l'équation de la question 2 (coefficients 1 et 1), les réactifs ont alors été mélangés dans les proportions stœchiométriques : $n_\text{initiale}(\text{H}_3\text{O}^+) = n_\text{versée}(\text{HO}^-)$, soit $C_\text{S}\,V_\text{S} = C_\text{b}\,V_\text{E}$.

$$C_\text{S} = \frac{C_\text{b}\,V_\text{E}}{V_\text{S}} = \frac{2{,}50\times10^{-2}\,\text{mol·L}^{-1}\times12{,}0\,\text{mL}}{10{,}0\,\text{mL}} = 3{,}00\times10^{-2}\,\text{mol·L}^{-1}$$

(les deux volumes sont dans la même unité, leur rapport n'a pas d'unité).

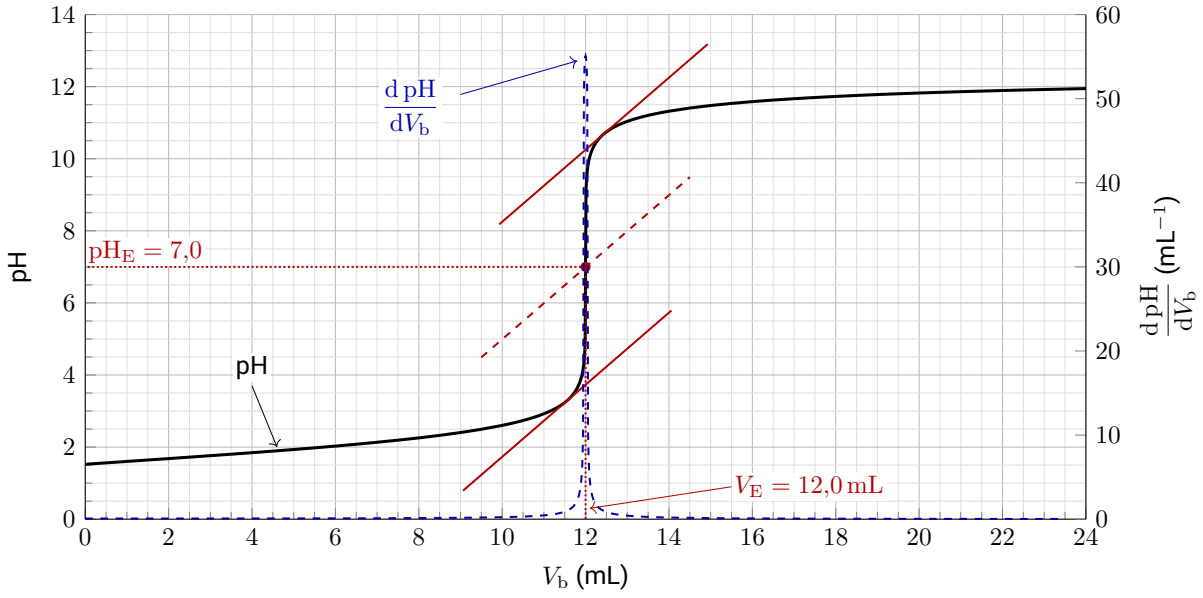
- *Retour au flacon.* La dilution a divisé la concentration par 200 ; on multiplie donc par 200 :

$$C_\text{a} = 200\times C_\text{S} = 200\times3{,}00\times10^{-2}\,\text{mol·L}^{-1} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{C_\text{a,titrage} = 6{,}0\,\text{mol·L}^{-1}}$$

(de $5{,}9\,\text{mol·L}^{-1}$ à $6{,}1\,\text{mol·L}^{-1}$ selon la lecture de V_E).

Conclusion. L'écart relatif avec la valeur tirée de l'étiquette est $\dfrac{|6{,}0-6{,}03|}{6{,}03}\approx0{,}5\,\%$, bien inférieur à l'incertitude de lecture : le titrage confirme la concentration annoncée par le fabricant.

6) Méthode des tangentes : on trace deux tangentes à la courbe, parallèles entre elles, de part et d'autre du saut de pH, puis la droite parallèle située à égale distance des deux. Elle coupe la courbe au point d'équivalence E.



On lit $V_\text{E} = 12{,}0\,\text{mL}$, en accord avec le pic de la dérivée, et

$$\boxed{\text{pH}_\text{E} = 7{,}0}$$ (lecture acceptée de 6,8 à 7,2).

C'est la valeur attendue pour le titrage d'un acide fort par une base forte : à l'équivalence, la solution ne contient plus que de l'eau et des ions spectateurs $\mathrm{Na^+}$ et $\mathrm{Cl^-}$, elle est neutre.

7) Un indicateur coloré convient si sa zone de virage contient le pH à l'équivalence (ou est comprise dans le saut de pH). Le **bleu de bromothymol** (zone de virage 6,0 – 7,6) contient $\mathrm{pH_E} = 7{,}0$: c'est le plus adapté. L'hélianthine et le rouge de méthyle virent trop tôt (pH inférieurs à 6,2) ; la phénolphtaléine vire dans le haut du saut, ce qui reste acceptable ici tant le saut est raide, mais le bleu de bromothymol est le meilleur choix.

Changement de teinte. Avant l'équivalence, le mélange est acide ($\mathrm{pH} < 6{,}0$) : l'indicateur est **jaune**. Dès que l'on dépasse l'équivalence, le pH dépasse 7,6 : l'indicateur devient **bleu**. On repère donc l'équivalence au passage du jaune au bleu (la teinte verte, mélange des deux, apparaît juste à l'équivalence).

Exercice 2 : Un satellite pour mesurer la masse de la Terre

6,5 points

1) La force gravitationnelle est attractive : elle est dirigée de A vers O, donc dans le sens de $\vec{u}_N$. D'après la loi de la gravitation universelle de Newton :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{T/A} = \frac{G\,M_T\,m}{r^2}\,\vec{u}_N}$$

2) *Système* : le satellite, de masse m constante ; *référentiel* : géocentrique, supposé galiléen ; *action* : la seule force $\overrightarrow{F}_{T/A}$.

La **deuxième loi de Newton** donne $m\,\vec{a} = \overrightarrow{F}_{T/A}$, d'où $\vec{a} = \dfrac{G\,M_T}{r^2}\,\vec{u}_N$: l'accélération est centripète.

Dans le repère de Frenet, pour un mouvement circulaire de rayon r, $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_T + \dfrac{v^2}{r}\,\vec{u}_N$. En identifiant les coordonnées :

- sur $\vec{u}_T$: $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, la vitesse est constante (mouvement bien uniforme) ;
- sur $\vec{u}_N$: $\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{G\,M_T}{r^2}$, soit $v^2 = \dfrac{G\,M_T}{r}$.

La vitesse étant positive : $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{r}}}$.

3) En une période T, le satellite fait un tour complet, de longueur $2\pi r$, à vitesse constante : $v = \dfrac{2\pi r}{T}$, donc $T = \dfrac{2\pi r}{v}$. On passe au carré puis on remplace v^2 par son expression :

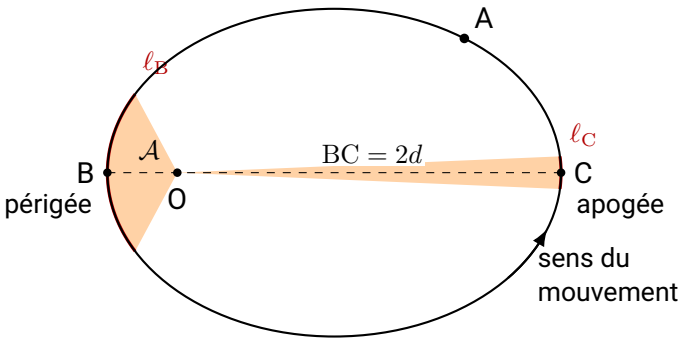
$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{v^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{G\,M_T/r} = \frac{4\pi^2 r^3}{G\,M_T} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M_T}}$$

Ce rapport ne dépend que de la masse de l'astre attracteur, pas du satellite.

4) **Première loi de Kepler** (loi des orbites), dans le **référentiel géocentrique** : la trajectoire du centre

du satellite est une ellipse dont le centre O de la Terre occupe l'un des foyers.

5) **Deuxième loi de Kepler** (loi des aires) : le segment [OA] qui relie le centre de la Terre au satellite balaie des aires égales pendant des durées égales.



On trace deux secteurs de même aire $\mathcal{A}$, l'un autour de B, l'autre autour de C : ils sont parcourus pendant la même durée τ. Le secteur proche de O est « court et large », celui d'en face « long et étroit » : l'arc ℓ_B parcouru autour du périgée est bien plus long que l'arc ℓ_C parcouru autour de l'apogée. Comme $v_B \approx \dfrac{\ell_B}{\tau}$ et $v_C \approx \dfrac{\ell_C}{\tau}$, on conclut :

$$\boxed{v_B > v_C}$$

le satellite va plus vite au périgée qu'à l'apogée.

6) Le grand axe est le segment [BC], qui passe par le foyer O : $BC = OB + OC = 2d$, donc

$$d = \frac{OB + OC}{2} = \frac{6{,}92 \times 10^6\,\text{m} + 8{,}38 \times 10^6\,\text{m}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{d = 7{,}65 \times 10^6\,\text{m}}$$

7) La période est la durée d'un tour : $T = \dfrac{\Delta t}{n} = \dfrac{7{,}99 \times 10^6\,\text{s}}{1200} = 6{,}658 \times 10^3\,\text{s}$ (environ 1 h 51 min ; valeur non arrondie gardée).

De $\dfrac{T^2}{d^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_T}$, on isole la masse de la Terre :

$$M_T = \frac{4\pi^2\,d^3}{G\,T^2} = \frac{4\pi^2 \times (7{,}65 \times 10^6\,\text{m})^3}{6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2} \times (6{,}658 \times 10^3\,\text{s})^2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{M_T \approx 5{,}98 \times 10^{24}\,\text{kg}}$$

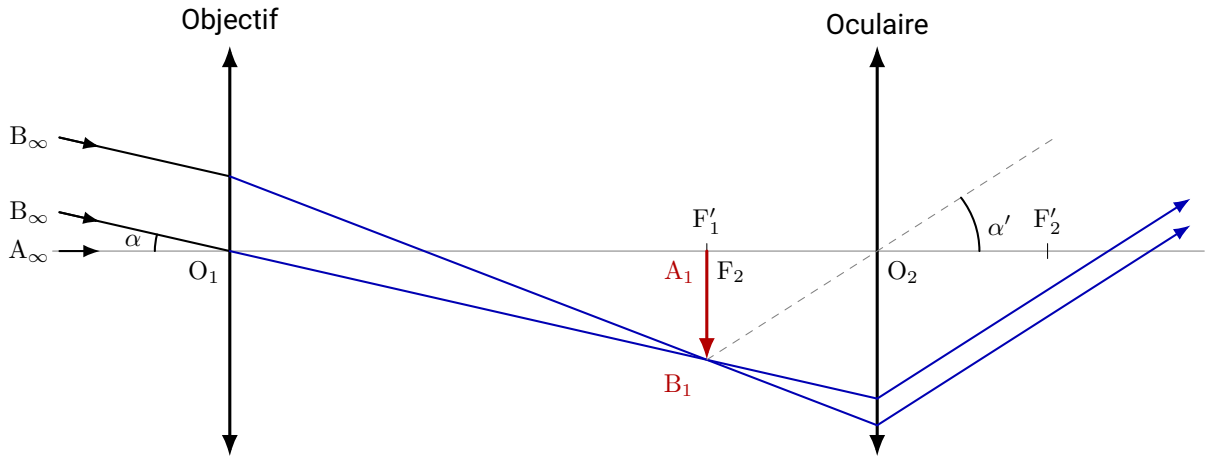
Vérification des unités : $\dfrac{\text{m}^3}{\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{s}^2} = \text{kg}$. Le résultat est en accord avec la valeur admise ($5{,}97 \times 10^{24}\,\text{kg}$).

Exercice 3 : Un avion de ligne vu à la lunette

5,5 points

1) Une lunette est afocale lorsqu'elle donne d'un objet à l'infini une image elle aussi à l'infini, que l'œil observe sans accommoder. Pour cela, le foyer image F_1' de l'objectif est confondu avec le foyer objet F_2 de l'oculaire.

2), 3) et 5) (angles) : schéma complété



- **2)** La lunette étant afocale, F_2 est confondu avec F'_1 ; F'_2 est le symétrique de F_2 par rapport au centre optique O_2 de l'oculaire.
- **3)** Pour un objet à l'infini, l'objectif donne une image A_1B_1 située dans le plan perpendiculaire à l'axe qui passe par F'_1 : A_1 en F'_1, B_1 à l'intersection de ce plan avec le rayon issu de B_∞ qui passe par O_1 sans être dévié. Le second rayon issu de B_∞ converge aussi en B_1. Puisque B_1 appartient aussi au plan focal objet de l'oculaire, tous les rayons qui en partent sortent de l'oculaire parallèles au rayon (B_1O_2), qui le traverse sans déviation (tracé en tirets).
- **5)** α : écart angulaire, à l'entrée, entre les rayons venus de B_∞ et ceux venus de A_∞ (parallèles à l'axe) ; α' : même écart à la sortie de l'oculaire.

4) Vu du sol, l'avion forme avec l'œil un triangle rectangle de côtés L et h : $\tan\alpha = \dfrac{L}{h}$. Comme $L \ll h$, on peut confondre la tangente et l'angle :

$$\alpha \approx \frac{L}{h} = \frac{37{,}6\,\text{m}}{11{,}2\times10^{3}\,\text{m}} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\alpha \approx 3{,}36\times10^{-3}\,\text{rad}}$$

(les deux longueurs sont converties dans la même unité). Cet angle est environ 11 fois plus grand que le pouvoir séparateur de l'œil, $3{,}0\times10^{-4}\,\text{rad}$: l'observateur distingue à l'œil nu l'avant et l'arrière de l'avion.

5) Le grossissement est le rapport de l'angle sous lequel on voit l'objet à travers l'instrument à l'angle sous lequel on le voit à l'œil nu :

$$\boxed{G = \frac{\alpha'}{\alpha}}$$

6) *À l'œil nu*, les bords verticaux du hublot, distants de $\ell = 20\,\text{cm}$, sont vus sous l'angle

$$\alpha_\text{h} \approx \frac{\ell}{h} = \frac{0{,}20\,\text{m}}{11{,}2\times10^{3}\,\text{m}} = 1{,}786\times10^{-5}\,\text{rad} < 3{,}0\times10^{-4}\,\text{rad}$$

(valeur non arrondie gardée pour la suite) : ils sont confondus.

À la lunette, ils sont vus sous l'angle $\alpha'_{\text{h}} = G\,\alpha_{\text{h}}$. Ils sont séparés si $G\,\alpha_{\text{h}} \geqslant 3{,}0 \times 10^{-4}\,\text{rad}$, c'est-à-dire si

$$G \geqslant \frac{3{,}0 \times 10^{-4}\,\text{rad}}{\alpha_{\text{h}}} = \frac{3{,}0 \times 10^{-4}\,\text{rad}}{1{,}786 \times 10^{-5}\,\text{rad}} = 16{,}8 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{G \geqslant 17 \text{ environ}}$$

- au grossissement minimal $G = 12$: $\alpha'_{\text{h}} = 12 \times 1{,}786 \times 10^{-5}\,\text{rad} = 2{,}1 \times 10^{-4}\,\text{rad} < 3{,}0 \times 10^{-4}\,\text{rad}$, les bords ne sont pas séparés ;
- au grossissement maximal $G = 36$: $\alpha'_{\text{h}} = 36 \times 1{,}786 \times 10^{-5}\,\text{rad} = 6{,}4 \times 10^{-4}\,\text{rad} > 3{,}0 \times 10^{-4}\,\text{rad}$, ils le sont.

Conclusion : oui, les bords verticaux du hublot peuvent être vus séparés, à condition de régler la lunette sur un grossissement d'au moins 17 environ (entre 17 et 36).