Exercice 1 : Swing de golf

9,5 points

Partie A : vitesse de la balle au départ

1) La caméra prend $f = 2\,000$ images en une seconde. Deux images consécutives sont donc séparées de

$$\Delta t = \frac{1}{f} = \frac{1}{2\,000\,\text{s}^{-1}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\Delta t = 5{,}00 \times 10^{-4}\,\text{s} = 0{,}500\,\text{ms}}$$

2) Deux observations sur la figure 1 :

- les neuf positions sont sur une même droite : le mouvement est **rectiligne** ;
- d'une image à la suivante, la balle parcourt toujours la même distance, pendant la même durée Δt : la valeur de la vitesse ne change pas, le mouvement est **uniforme**.

Sur ces premières millisecondes, la balle est donc en **mouvement rectiligne uniforme**.

3) Le mouvement étant uniforme, V_0 est la vitesse sur tout l'enregistrement. Pour que l'erreur de lecture pèse le moins possible, on travaille sur l'écart le plus long : de la position 1 à la position 9, soit 8 intervalles de durée Δt.

À la règle, on relève $5{,}0\,\text{cm}$ pour le segment d'échelle ($10\,\text{cm}$ réels) et $14{,}0\,\text{cm}$ de la position 1 à la position 9. Par proportionnalité, la distance réelle parcourue est

$$d = 14{,}0 \times \frac{10}{5{,}0} = 28\,\text{cm} = 0{,}28\,\text{m}.$$

$$V_0 = \frac{d}{8\,\Delta t} = \frac{0{,}28\,\text{m}}{8 \times 5{,}00 \times 10^{-4}\,\text{s}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{V_0 \approx 70\,\text{m·s}^{-1}}$$

Tolérance : une mesure de $13{,}8\,\text{cm}$ à $14{,}2\,\text{cm}$ donne $69\,\text{m·s}^{-1}$ à $71\,\text{m·s}^{-1}$. Le résultat ne dépend pas de l'échelle d'impression, puisque l'on mesure aussi le segment d'échelle.

Partie B : la balle modélisée par un point matériel

4) Le système étudié est la balle, dont la masse m ne varie pas, dans le référentiel terrestre, que l'on considère comme galiléen. L'action de l'air étant négligée, la balle n'est soumise qu'à son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

D'après la **deuxième loi de Newton**, $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, d'où $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, puis, en simplifiant par m, $\vec{a} = \vec{g}$.

Comme $\vec{g}$ est vertical descendant et $\vec{\jmath}$ vertical ascendant, $\vec{g} = -g\,\vec{\jmath}$. Ainsi

$$\boxed{a_x = 0 \qquad a_y = -g}$$

5) Le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps : les coordonnées de $\vec{v}$ sont des primitives de celles de $\vec{a}$,

$$v_x(t) = C_1 \qquad v_y(t) = -g\,t + C_2.$$

À $t = 0$, $\vec{v} = \vec{V_0}$, de coordonnées $V_0\cos\theta$ et $V_0\sin\theta$: $C_1 = V_0\cos\theta$ et $C_2 = V_0\sin\theta$. Donc

$$v_x(t) = V_0\cos\theta \qquad v_y(t) = -g\,t + V_0\sin\theta.$$

De même, $\vec{v}$ est la dérivée de $\overrightarrow{OM}$, d'où

$$x(t) = V_0 \cos\theta \cdot t + C_3 \qquad y(t) = -\tfrac{1}{2}\, g\, t^2 + V_0 \sin\theta \cdot t + C_4.$$

À $t = 0$, M est en O : $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$, donc $C_3 = C_4 = 0$.

$$\boxed{x(t) = V_0 \cos(\theta)\, t \qquad y(t) = -\tfrac{1}{2}\, g\, t^2 + V_0 \sin(\theta)\, t}$$

6) Équation de la trajectoire. De $x = V_0 \cos(\theta)\, t$, on tire $t = \dfrac{x}{V_0 \cos\theta}$, que l'on reporte dans $y(t)$:

$$y(x) = -\frac{g}{2\, {V_0}^2 \cos^2\theta}\, x^2 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\, x = x\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{g\, x}{2\, {V_0}^2 \cos^2\theta}\right).$$

Point de chute. La balle revient au niveau du sol quand $y = 0$. La solution $x = 0$ est le point de départ ; l'autre annule la parenthèse :

$$\frac{g\, x_{\max}}{2\, {V_0}^2 \cos^2\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \iff x_{\max} = \frac{2\, {V_0}^2 \cos^2\theta}{g} \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\boxed{x_{\max} = \frac{2\, {V_0}^2 \cos(\theta)\sin(\theta)}{g}}$$: c'est l'expression annoncée.

7) Calculatrice en mode degrés :

$$x_{\max} = \frac{2 \times (70{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 \times \cos(12{,}0°) \times \sin(12{,}0°)}{9{,}81\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}} \implies \boxed{x_{\max} = 2{,}03 \times 10^2\ \mathrm{m}}$$

8) La portée calculée sans l'air, $203\ \mathrm{m}$, est plus **petite** que la portée réelle, d'environ $240\ \mathrm{m}$: l'écart vaut $37\ \mathrm{m}$, soit environ $15\ \%$ de la portée réelle.

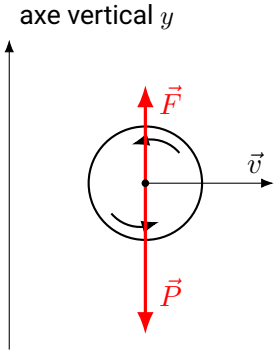
C'est surprenant : on pense d'abord que l'air ne fait que freiner la balle, ce qui devrait raccourcir son vol par rapport au modèle sans air. On observe le contraire : l'air a donc aussi un effet qui allonge le vol, étudié dans la partie C.

Partie C : le rôle de l'air dans le vol de la balle

9) Dans ce modèle, la balle subit deux forces, appliquées en son centre :

- son poids $\vec{P}$, vertical, vers le bas ;
- la force $\vec{F}$ créée par l'effet Magnus, dirigée verticalement vers le haut.

La balle finit par retomber : $\vec{F}$ est dessinée plus courte que $\vec{P}$ (longueurs non à l'échelle : d'après la question 11, F ne vaut qu'environ $15\ \%$ de P). La vitesse $\vec{v}$ n'est pas une force, et le club n'agit plus sur la balle après l'impact.



10) La deuxième loi de Newton s'écrit maintenant $\vec{P} + \vec{F} = m\,\vec{a}$. On projette sur l'axe vertical, orienté

vers le haut ($\vec{P}$ vers le bas, $\vec{F}$ vers le haut) :

$$-m\,g + F = m\,a_y \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a_y = -g + \frac{F}{m} = -\left(g - \frac{F}{m}\right)}$$

Les deux forces sont verticales : on a toujours $a_x = 0$.

11) Par rapport à la partie B, une seule chose change : la coordonnée a_y vaut $-\left(g - \dfrac{F}{m}\right)$ au lieu de $-g$; a_x et les conditions initiales sont les mêmes. Les calculs des questions 5 et 6 restent valables à condition d'y remplacer g par $g - \dfrac{F}{m}$ (constante, puisque F est constante). La portée devient

$$x'_{\max} = \frac{2\,V_0^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{g - \dfrac{F}{m}}.$$

On en tire F :

$$g - \frac{F}{m} = \frac{2\,V_0^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{x'_{\max}} \quad \Longrightarrow \quad F = m\left(g - \frac{2\,V_0^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{x'_{\max}}\right).$$

Avec $m = 45\,\text{g} = 4{,}5\times10^{-2}\,\text{kg}$, $x'_{\max} = 240\,\text{m}$, $V_0 = 70{,}0\,\text{m·s}^{-1}$ et $\theta = 12{,}0°$:

$$\frac{2\,V_0^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{x'_{\max}} = \frac{2\times70{,}0^2\times\cos(12{,}0°)\times\sin(12{,}0°)}{240} = 8{,}30\,\text{m·s}^{-2}$$

$$F = 4{,}5\times10^{-2}\,\text{kg}\times(9{,}81\,\text{m·s}^{-2} - 8{,}30\,\text{m·s}^{-2}) = 4{,}5\times10^{-2}\,\text{kg}\times1{,}51\,\text{m·s}^{-2}$$

$$\boxed{F \approx 6{,}8\times10^{-2}\,\text{N}}$$

On vérifie que $F < P = m\,g = 0{,}44\,\text{N}$: la force due à l'effet Magnus vaut environ $15\,\%$ du poids, ce qui est cohérent avec une balle qui monte puis retombe.

Exercice 2 : Du nectar au miel

6 points

1) Sur la figure 3, à $1\,200\,\text{h}$ (50 jours), la réaction n'est pas terminée : il reste $0{,}038\,\text{mol·L}^{-1}$ de saccharose. L'évolution du système s'étale sur des centaines d'heures et se suit sans difficulté avec des mesures espacées : la transformation est **lente**.

2) La température est un **facteur cinétique** : si elle variait pendant l'expérience, la vitesse de la réaction changerait aussi pour cette raison. On veut que la seule cause de variation de la vitesse soit la concentration du saccharose, pour pouvoir déterminer l'ordre de la réaction.

3) Une enzyme est un catalyseur biologique : l'invertase accélère fortement l'hydrolyse du saccharose (c'est son rôle dans le jabot de l'abeille). On l'écarte pour étudier la cinétique de l'hydrolyse elle-même, sans catalyseur, dans des conditions où elle est assez lente pour être suivie.

4) À $t = 0$, la courbe part de $\boxed{[\text{S}]_0 = 0{,}30\,\text{mol·L}^{-1}}$.

5) Le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ est la durée nécessaire pour que l'avancement parvienne à la moitié de l'avancement final.

Ici, l'eau est le solvant, donc en très large excès ; la réaction étant totale, tout le saccharose finit par disparaître. À $t_{1/2}$, sa concentration a donc diminué de moitié :

$$[\mathrm{S}](t_{1/2}) = \frac{[\mathrm{S}]_0}{2} = \frac{0{,}30\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}}{2} = 0{,}15\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}.$$

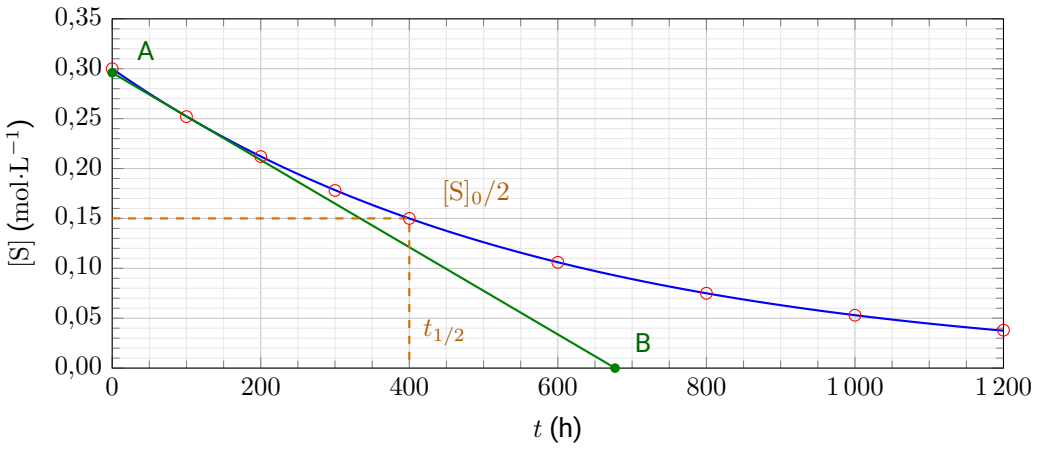
On trace l'horizontale $[\mathrm{S}] = 0{,}15\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}$ jusqu'à la courbe, puis on descend sur l'axe des temps (tirets ci-dessous) : $\boxed{t_{1/2} = 400\,\mathrm{h}}$ (tolérance de lecture : $380\,\mathrm{h}$ à $420\,\mathrm{h}$, petits carreaux de $50\,\mathrm{h}$).

6) **a.** Par définition, elle s'obtient en dérivant $[\mathrm{S}]$ par rapport au temps et en changeant le signe :

$$\boxed{v_{\mathrm{disp}}(\mathrm{S}) = -\frac{\mathrm{d}[\mathrm{S}]}{\mathrm{d}t}}$$

Le signe « $-$ » rend la vitesse positive, puisque $[\mathrm{S}]$ diminue.

b. La valeur de $\frac{\mathrm{d}[\mathrm{S}]}{\mathrm{d}t}$ à $t = 100\,\mathrm{h}$ est la pente de la droite qui touche la courbe en ce point (tangente). On trace cette tangente (en vert ci-dessous) et on lit les coordonnées de deux de ses points, aussi éloignés que possible : $A\,(0\,\mathrm{h}\,;\,0{,}296\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}})$ et $B\,(677\,\mathrm{h}\,;\,0\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}})$.



$$\frac{\mathrm{d}[\mathrm{S}]}{\mathrm{d}t}(100\,\mathrm{h}) = \frac{(0 - 0{,}296)\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}}{(677 - 0)\,\mathrm{h}} = -4{,}37 \times 10^{-4}\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}{\cdot}h^{-1}}$$

$$\boxed{v_{\mathrm{disp}}(\mathrm{S}) \approx 4{,}4 \times 10^{-4}\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}{\cdot}h^{-1}}}$$

Tolérance : selon le tracé de la tangente, toute valeur de $4{,}0 \times 10^{-4}$ à $4{,}8 \times 10^{-4}\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}{\cdot}h^{-1}}$ est acceptée.

c. Plus on avance dans le temps, plus la courbe s'aplatit : les tangentes successives ont une pente négative de plus en plus proche de 0. La vitesse $v_{\mathrm{disp}}(\mathrm{S})$ **diminue** donc.

Explication : au fur et à mesure qu'il est consommé, le saccharose devient moins concentré ; or la concentration des réactifs fait partie des facteurs cinétiques. Moins il y a de saccharose, plus la réaction est lente.

7) Une loi de vitesse d'ordre 1 par rapport au saccharose signifie que la vitesse de disparition est proportionnelle à sa concentration : $v_{\text{disp}}(\text{S}) = k \times [\text{S}]$, où k est une constante positive.

En égalant avec la définition de la question 6.a :

$$-\frac{\text{d}[\text{S}]}{\text{d}t} = k \times [\text{S}] \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\text{d}[\text{S}]}{\text{d}t} = -k \times [\text{S}]}$$

8) On écrit la solution à la date $t = 0$: $[\text{S}](0) = B \times \text{e}^0 = B$. Or $[\text{S}](0)$ est la concentration initiale du saccharose. La constante B est donc la **concentration initiale en saccharose** : $\boxed{B = [\text{S}]_0 = 0{,}30\,\text{mol·L}^{-1}}$.

Pour aller plus loin : pour une loi d'ordre 1, $k = \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}} = \dfrac{\ln 2}{400\,\text{h}} = 1{,}73 \times 10^{-3}\,\text{h}^{-1}$ (valeur gardée non arrondie) ; à $100\,\text{h}$, $k \times [\text{S}] = 1{,}73 \times 10^{-3}\,\text{h}^{-1} \times 0{,}252\,\text{mol·L}^{-1} = 4{,}4 \times 10^{-4}\,\text{mol·L}^{-1}\text{·h}^{-1}$, en accord avec la tangente.

Exercice 3 : Cascade à moto à Las Vegas

4,5 points

Partie A : phase d'accélération

1) **a.** La coordonnée v_x de la vitesse est la dérivée de $x(t)$ par rapport au temps :

$$v_x(t) = \frac{\text{d}x}{\text{d}t} = 2 \times 2{,}35 \times t \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_x(t) = 4{,}70 \times t} \quad (v_x \text{ en } \text{m·s}^{-1}, t \text{ en s})$$

b. La coordonnée de l'accélération est la dérivée de $v_x(t)$:

$$a_x(t) = \frac{\text{d}v_x}{\text{d}t} = 4{,}70\,\text{m·s}^{-2}.$$

La trajectoire est une droite (piste rectiligne) et l'accélération est constante et positive, dans le sens du mouvement : le mouvement est **rectiligne uniformément accéléré**.

c. La phase d'accélération se termine à la date t_1 où la vitesse atteint $26\,\text{m·s}^{-1}$:

$$4{,}70 \times t_1 = 26 \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \frac{26}{4{,}70} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{t_1 \approx 5{,}5\,\text{s}}$$

d. On reporte t_1, non arrondie ($t_1 = 5{,}53\,\text{s}$), dans l'équation horaire :

$$x(t_1) = 2{,}35 \times 5{,}53^2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x(t_1) \approx 72\,\text{m}}$$

Avec t_1 arrondie à $5{,}5\,\text{s}$, on trouve $71\,\text{m}$: les deux valeurs sont acceptées.

Partie B : phase de chute

2) On étudie le système {motard + moto} dans le référentiel terrestre. Toute action de l'air étant négligée, il n'est soumis qu'à son poids, force conservative : son **énergie mécanique se conserve**

pendant la chute.

On note A le point de départ, sur le toit, et B le point d'arrivée sur la rampe, avec un axe vertical (Oz) orienté vers le haut ; $z_\mathrm{A} - z_\mathrm{B} = h = 18{,}3\,\mathrm{m}$ et $v_\mathrm{A} = 0$.

$$E_\mathrm{m}(\mathrm{A}) = E_\mathrm{m}(\mathrm{B}) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 + m\,g\,z_\mathrm{A} = \tfrac{1}{2}\,m\,v_\mathrm{B}^2 + m\,g\,z_\mathrm{B}$$

$$\tfrac{1}{2}\,v_\mathrm{B}^2 = g\,(z_\mathrm{A} - z_\mathrm{B}) \quad \Longrightarrow \quad v_\mathrm{B} = \sqrt{2\,g\,h}$$

$$v_\mathrm{B} = \sqrt{2 \times 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \times 18{,}3\,\mathrm{m}} = 18{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

Conversion : $1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 3{,}6\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, d'où, avec la valeur non arrondie, $v_\mathrm{B} = 18{,}95 \times 3{,}6$:

$$\boxed{v_\mathrm{B} \approx 68{,}2\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}}$$