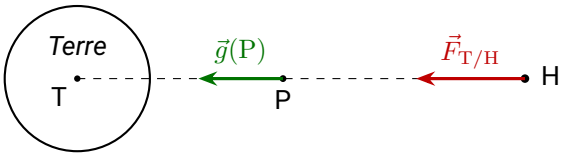
Exercice 1 : Le télescope spatial Hubble

10 points

Partie 1 : Étude du mouvement de Hubble

Figures complétées (questions 1, 2, 5, 6 et 8, sans souci d'échelle) ; $\vec{a}$ et $\vec{u}_n$, comme $\vec{v}$ et $\vec{u}_t$, ont même direction et même sens.



Questions 1 et 2 : force et champ de gravitation



Questions 5, 6 et 8 : repère de Frenet, $\vec{a}$ et $\vec{v}$

1) La force $\vec{F}_{\mathrm{T/H}}$ s'applique au satellite H. Sa direction est la droite (HT), T désignant le centre de la Terre, et elle est orientée de H vers T : l'interaction gravitationnelle est attractive. Sa valeur est $F_{\mathrm{T/H}} = \dfrac{G\,M\,m}{(R_{\mathrm{T}}+h)^2}$, où $R_{\mathrm{T}}+h$ est la distance entre les centres de la Terre et du satellite.

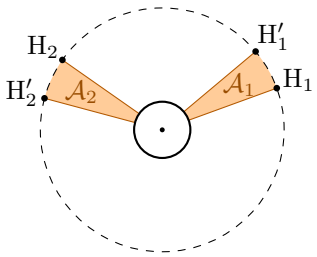
2) En tout point P de l'espace qui entoure la Terre, le champ de gravitation $\vec{g}(\mathrm{P})$ est dirigé vers le centre T de la Terre (figure de gauche). À la distance $R_{\mathrm{T}}+h$ du centre de la Terre, sa valeur est

$$\boxed{g(h) = \frac{G\,M}{(R_{\mathrm{T}}+h)^2}}$$

On retrouve la force de la question 1 en écrivant $\vec{F}_{\mathrm{T/H}} = m\,\vec{g}$.

3) **Deuxième loi de Kepler (loi des aires)** : le rayon vecteur $\overrightarrow{\mathrm{TH}}$, issu du centre de la Terre, balaie des aires égales en des durées égales.

Sur la figure 2, on relie le centre T aux points H_1, H'_1, H_2 et H'_2, puis on colorie les deux secteurs obtenus. Les deux trajets durant le même temps, les deux secteurs ont la même aire : $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.



4) D'après le document, l'orbite est circulaire : le satellite reste à la distance $r = R_{\mathrm{T}}+h$ du centre T. Un secteur de ce cercle d'angle α (en radian) a pour aire $\dfrac{1}{2}\,r^2\,\alpha$ et l'arc correspondant a pour longueur $r\,\alpha$. Deux secteurs de même aire ont donc le même angle, et les deux arcs $\mathrm{H}_1\mathrm{H}'_1$ et $\mathrm{H}_2\mathrm{H}'_2$ sont de longueurs égales. Parcourus pendant la même durée, ils le sont à la même vitesse moyenne. Le même argument s'applique à deux intervalles de temps égaux pris n'importe où sur l'orbite : la valeur de la vitesse ne change pas.

Trajectoire circulaire et vitesse de valeur constante : le mouvement de Hubble est **circulaire uniforme**.

5) *Système* : le satellite, de masse m. *Référentiel* : géocentrique, supposé galiléen. *Force* : la seule force qui s'exerce est l'attraction de la Terre.

Repère de Frenet (figure de droite) : origine au satellite H, $\vec{u}_t$ tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement, $\vec{u}_n$ perpendiculaire à $\vec{u}_t$ et orienté vers le centre T de la trajectoire. Dans ce repère, $\vec{F}_{\mathrm{T/H}} = \dfrac{G\,M\,m}{(R_\mathrm{T}+h)^2}\,\vec{u}_n$.

D'après la deuxième loi de Newton, $\vec{F}_{\mathrm{T/H}} = m\,\vec{a}$, d'où $\vec{a} = \dfrac{G\,M}{(R_\mathrm{T}+h)^2}\,\vec{u}_n$ (la masse du satellite se simplifie). Les coordonnées de l'accélération sont donc

$$\boxed{a_t = 0 \qquad \text{et} \qquad a_n = \frac{G\,M}{(R_\mathrm{T}+h)^2}}$$

6) Le vecteur accélération part de H et pointe vers le centre de la Terre : il a la direction et le sens de $\vec{F}_{\mathrm{T/H}}$ et de $\vec{u}_n$ (figure de droite). On dit qu'il est centripète.

7) Dans le repère de Frenet, pour un mouvement circulaire de rayon $r = R_\mathrm{T} + h$, la coordonnée normale de l'accélération s'écrit $a_n = \dfrac{v^2}{R_\mathrm{T}+h}$. En l'égalant à l'expression obtenue à la question 5 :

$$\frac{v^2}{R_\mathrm{T}+h} = \frac{G\,M}{(R_\mathrm{T}+h)^2} \quad\Longrightarrow\quad v^2 = \frac{G\,M}{R_\mathrm{T}+h} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{v = \sqrt{\frac{G\,M}{R_\mathrm{T}+h}}}$$

(la vitesse est positive). On remarque aussi que $a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$: on retrouve un mouvement uniforme.

8) Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement, donc selon $\vec{u}_t$ (figure de droite) :

$$\boxed{\vec{v} = v\,\vec{u}_t = \sqrt{\frac{G\,M}{R_\mathrm{T}+h}}\,\vec{u}_t}$$

9) D'après le document, Hubble parcourt la longueur de son orbite, $L \approx 43\,400\,\mathrm{km}$, en une durée $\Delta t \approx 95\,\mathrm{min}$. Le mouvement étant uniforme :

$$v = \frac{L}{\Delta t} = \frac{43\,400\times10^3\,\mathrm{m}}{95\times60\,\mathrm{s}} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{v \approx 7{,}6\times10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

On retrouve la valeur annoncée : elle est compatible avec les informations du document.

10) En une période T, le satellite fait un tour complet, soit une distance égale au périmètre $2\,\pi\,(R_\mathrm{T}+h)$ de son orbite, à la vitesse constante v :

$$\boxed{T = \frac{2\,\pi\,(R_\mathrm{T}+h)}{v}}$$

11) On remplace v par l'expression de la question 7 :

$$T = 2\,\pi\,(R_\mathrm{T}+h)\sqrt{\frac{R_\mathrm{T}+h}{G\,M}} \quad\Longrightarrow\quad T^2 = \frac{4\,\pi^2\,(R_\mathrm{T}+h)^3}{G\,M} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\frac{T^2}{(R_\mathrm{T}+h)^3} = \frac{4\,\pi^2}{G\,M}}$$

Ce rapport ne fait intervenir que G et la masse M de la Terre : il ne dépend ni de la masse ni de l'altitude du satellite. On reconnaît la troisième loi de Kepler, appliquée aux satellites de la Terre.

Partie 2 : Peser la Terre grâce à Kepler

1) On calcule, pour chaque satellite, le rapport $\dfrac{T^2}{r^3}$ en unités SI, r étant le rayon de l'orbite circulaire (distance au centre de la Terre) ou, pour l'orbite elliptique de la Lune, son demi-grand axe a. L'apogée et le périgée ne servent pas.

Hubble : $r = 6\,371\,\text{km} + 540\,\text{km} = 6{,}911 \times 10^6\,\text{m}$ et $T = 95{,}3 \times 60\,\text{s} = 5\,718\,\text{s}$:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{(5\,718\,\text{s})^2}{(6{,}911 \times 10^6\,\text{m})^3} = 9{,}91 \times 10^{-14}\,\text{s}^2\cdot\text{m}^{-3}$$

ISS : $r = 6\,371\,\text{km} + 420\,\text{km} = 6{,}791 \times 10^6\,\text{m}$ et $T = 92{,}8 \times 60\,\text{s} = 5\,568\,\text{s}$:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{(5\,568\,\text{s})^2}{(6{,}791 \times 10^6\,\text{m})^3} = 9{,}90 \times 10^{-14}\,\text{s}^2\cdot\text{m}^{-3}$$

Lune : $a = 3{,}844 \times 10^8\,\text{m}$ et $T = 27{,}3 \times 24 \times 3\,600\,\text{s} = 2{,}359 \times 10^6\,\text{s}$:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{(2{,}359 \times 10^6\,\text{s})^2}{(3{,}844 \times 10^8\,\text{m})^3} = 9{,}80 \times 10^{-14}\,\text{s}^2\cdot\text{m}^{-3}$$

Les trois rapports sont égaux à environ $1\,\%$ près, alors que les rayons d'orbite vont de $6{,}8\times10^3\,\text{km}$ à $3{,}8 \times 10^5\,\text{km}$: le rapport $\dfrac{T^2}{r^3}$ prend la même valeur pour les trois satellites de la Terre. La troisième loi de Kepler est vérifiée.

2) D'après la question 11 de la partie 1, $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\,\pi^2}{G\,M}$. On prend pour k la moyenne des trois rapports, $k \approx 9{,}87 \times 10^{-14}\,\text{s}^2\cdot\text{m}^{-3}$; on en tire $M = \dfrac{4\,\pi^2}{G\,k}$:

$$M = \frac{4\,\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2} \times 9{,}87 \times 10^{-14}\,\text{s}^2\cdot\text{m}^{-3}} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{M = 6{,}0 \times 10^{24}\,\text{kg}}$$

Exercice 2 : Acide fort ou acide faible ?

10 points

Étude de la solution S_1

1) L'acide nitrique cède un ion hydrogène H^+ à l'eau, qui joue le rôle de base (couples HNO_3/NO_3^- et H_3O^+/H_2O). La réaction étant totale, on écrit une simple flèche :

$$\text{HNO}_3\text{(aq)} + \text{H}_2\text{O (l)} \longrightarrow \text{NO}_3^-\text{(aq)} + \text{H}_3\text{O}^+\text{(aq)}$$

2) Quantité d'acide nitrique apportée : $n_0 = c\,V = 1{,}0 \times 10^{-2}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1} \times 0{,}500\,\text{L} = 5{,}0 \times 10^{-3}\,\text{mol}$.

Un acide fort réagit totalement avec l'eau : à l'état final, il ne reste plus d'acide nitrique et, d'après les coefficients de l'équation, il s'est formé autant d'ions nitrate et d'ions oxonium que d'acide apporté :

$$n_f(\text{HNO}_3) = 0 \quad ; \quad \boxed{n_f(\text{NO}_3^-) = n_f(\text{H}_3\text{O}^+) = 5{,}0 \times 10^{-3}\,\text{mol}}$$

soit $[NO_3^-]_f = [H_3O^+]_f = \dfrac{5{,}0 \times 10^{-3}\,\text{mol}}{0{,}500\,\text{L}} = 1{,}0 \times 10^{-2}\,\text{mol·L}^{-1}$, l'eau étant le solvant.

3) Le taux d'avancement final est $\tau = \dfrac{x_f}{x_{\max}}$. L'eau est en excès, l'acide nitrique est le réactif limitant : $x_{\max} = n_0$. La réaction étant totale, l'acide est entièrement consommé : $x_f = n_0 = x_{\max}$, donc

$$\boxed{\tau = 1}$$

4) $\text{pH} = -\log\left(\dfrac{[H_3O^+]_f}{c^\circ}\right) = -\log\left(1{,}0 \times 10^{-2}\right)$, soit $\boxed{\text{pH} = 2{,}0}$.

Étude de la solution S_2

5) Couples CH_3COOH/CH_3COO^- et H_3O^+/H_2O. On ne sait pas encore si la réaction est totale : on écrit une double flèche (le résultat de la question 10 la justifiera).

$$CH_3COOH\,(aq) + H_2O\,(l) \rightleftharpoons CH_3COO^-\,(aq) + H_3O^+\,(aq)$$

6) Tableau d'avancement (quantités de matière en mole), l'eau étant le solvant :

Équation	CH_3COOH (aq)	+ H_2O (l)	$\rightleftharpoons$	CH_3COO^- (aq)	+ H_3O^+ (aq)
État initial ($x = 0$)	n_0	solvant		0	0
En cours (x)	$n_0 - x$	solvant		x	x
État final (x_f)	$n_0 - x_f$	solvant		x_f	x_f

avec $n_0 = c\,V = 5{,}0 \times 10^{-3}\,\text{mol}$.

7) Toutes les espèces sont dans le même volume V :

$$[CH_3COOH]_f = \frac{n_0 - x_f}{V} \quad ; \quad [CH_3COO^-]_f = [H_3O^+]_f = \frac{x_f}{V}$$

8) Par définition, à l'équilibre, $K_A = \dfrac{[CH_3COO^-]_f \times [H_3O^+]_f}{[CH_3COOH]_f \times c^\circ}$. On remplace les concentrations par les expressions de la question 7 :

$$K_A = \frac{\dfrac{x_f}{V} \times \dfrac{x_f}{V}}{\dfrac{n_0 - x_f}{V} \times c^\circ} = \frac{x_f^2}{V^2} \times \frac{V}{c^\circ\,(n_0 - x_f)} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{K_A = \frac{x_f^2}{c^\circ\,V\,(n_0 - x_f)}}$$

9) On développe la relation précédente pour obtenir une équation du second degré en x_f :

$$x_f^2 + K_A\,c^\circ\,V\,x_f - K_A\,c^\circ\,V\,n_0 = 0,$$

avec $K_A\,c^\circ\,V = 1{,}6 \times 10^{-5} \times 1\,\text{mol·L}^{-1} \times 0{,}500\,\text{L} = 8{,}0 \times 10^{-6}\,\text{mol}$. Discriminant (en mol^2) :

$$\Delta = (8{,}0 \times 10^{-6})^2 + 4 \times 8{,}0 \times 10^{-6} \times 5{,}0 \times 10^{-3} = 1{,}60 \times 10^{-7}.$$

L'avancement étant positif, on garde la racine positive (l'autre, $\approx -2{,}0 \times 10^{-4}\,\text{mol}$, n'a pas de

sens physique) :

$$x_f = \frac{-8{,}0 \times 10^{-6} + \sqrt{1{,}60 \times 10^{-7}}}{2} = 1{,}96 \times 10^{-4}\,\text{mol}$$

On en déduit les concentrations à l'état final :

$$\boxed{[CH_3COO^-]_f = [H_3O^+]_f = \frac{1{,}96 \times 10^{-4}\,\text{mol}}{0{,}500\,\text{L}} = 3{,}9 \times 10^{-4}\,\text{mol·L}^{-1}}$$

$$\boxed{[CH_3COOH]_f = \frac{5{,}0 \times 10^{-3}\,\text{mol} - 1{,}96 \times 10^{-4}\,\text{mol}}{0{,}500\,\text{L}} = 9{,}6 \times 10^{-3}\,\text{mol·L}^{-1}}$$

(Vérification : $\frac{(3{,}92 \times 10^{-4})^2}{9{,}61 \times 10^{-3}} = 1{,}6 \times 10^{-5} = K_A$.)

10) L'eau est en excès, donc $x_{max} = n_0 = 5{,}0 \times 10^{-3}\,\text{mol}$:

$$\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{1{,}96 \times 10^{-4}\,\text{mol}}{5{,}0 \times 10^{-3}\,\text{mol}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\tau = 0{,}039 = 3{,}9\,\%}$$

$\tau < 1$: la transformation n'est pas totale, elle aboutit à un état d'équilibre. Seules 4 molécules d'acide éthanoïque sur 100 environ ont cédé un ion H^+ à l'eau : l'acide éthanoïque est un **acide faible**, contrairement à l'acide nitrique ($\tau = 1$).

11) $\text{pH} = -\log\left(\frac{[H_3O^+]_f}{c^\circ}\right) = -\log\left(3{,}92 \times 10^{-4}\right)$, soit $\boxed{\text{pH} = 3{,}4}$.

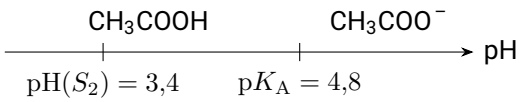
À même concentration apportée, la solution d'acide faible est moins acide que celle d'acide fort ($3{,}4 > 2{,}0$).

12) Le $\text{p}K_A$ est défini par $\text{p}K_A = -\log K_A$:

$$\text{p}K_A = -\log\left(1{,}6 \times 10^{-5}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\text{p}K_A = 4{,}8}$$

Contrôle avec la relation $\text{pH} = \text{p}K_A + \log\frac{[CH_3COO^-]_f}{[CH_3COOH]_f}$: $4{,}80 + \log\frac{3{,}92 \times 10^{-4}}{9{,}61 \times 10^{-3}} = 4{,}80 - 1{,}39 = 3{,}41$, en accord avec la question 11.

13) Diagramme de prédominance du couple : la forme acide prédomine pour $\text{pH} < \text{p}K_A$, la forme basique pour $\text{pH} > \text{p}K_A$.



Dans S_2, $\text{pH} = 3{,}4 < \text{p}K_A = 4{,}8$: c'est l'**acide éthanoïque CH_3COOH** qui prédomine. En effet, $[CH_3COOH]_f \approx 25 \times [CH_3COO^-]_f$.

14) Plus le $\text{p}K_A$ d'un couple est petit (donc plus K_A est grand), plus l'acide de ce couple réagit avec l'eau et plus il est fort. Or $\text{p}K_A(\text{acide ascorbique}) = 4{,}1 < \text{p}K_A(\text{acide éthanoïque}) = 4{,}8$: l'**acide ascorbique est un acide plus fort** que l'acide éthanoïque.