Exercice 1 : Tir au but en douceur

8,5 points

1) Le système étudié est le ballon, dont la masse m ne varie pas, dans le référentiel terrestre, que l'on peut considérer comme galiléen pendant la durée très courte du tir.

Bilan des actions : d'après l'énoncé, le ballon ne subit que son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

D'après la deuxième loi de Newton, $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$; ici $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$ et, la masse se simplifiant, $\vec{a} = \vec{g}$.

Dans le repère (O ; x, y), l'axe Ox est horizontal et l'axe Oy pointe vers le haut ; $\vec{g}$, lui, pointe vers le bas :

$$\boxed{a_x(t) = 0} \qquad \boxed{a_y(t) = -g}$$

2) Vitesse. Le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps ($\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$) : v_x est donc une fonction de dérivée nulle et v_y une fonction de dérivée $-g$. Il existe deux constantes k_1 et k_2 telles que

$$v_x(t) = k_1 \qquad \text{et} \qquad v_y(t) = -g\,t + k_2.$$

À $t = 0$, la vitesse est $\vec{v}_0$; en projetant ce vecteur, de norme v_0 et incliné de α sur l'horizontale, on obtient $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ et $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$. Ainsi $k_1 = v_0 \cos\alpha$ et $k_2 = v_0 \sin\alpha$:

$$\boxed{v_x(t) = v_0 \cos\alpha} \qquad \boxed{v_y(t) = -g\,t + v_0 \sin\alpha}$$

Position. De même, $\vec{v} = \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}/\mathrm{d}t$: $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions dont les dérivées sont $v_x(t)$ et $v_y(t)$. Il existe deux constantes k_3 et k_4 telles que

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \times t + k_3 \qquad \text{et} \qquad y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0 \sin\alpha \times t + k_4.$$

À $t = 0$, le ballon est en O, donc $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$, ce qui impose $k_3 = 0$ et $k_4 = 0$. On obtient ainsi les équations horaires :

$$\boxed{x(t) = v_0 \cos\alpha \times t} \qquad \boxed{y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0 \sin\alpha \times t}$$

Vérification : en dérivant $x(t)$ et $y(t)$, on retrouve bien $v_x(t)$ et $v_y(t)$, puis $a_x(t)$ et $a_y(t)$.

3) La trajectoire est la relation entre y et x, indépendante du temps. Comme $\alpha \neq 90°$, $\cos\alpha \neq 0$ et la première équation horaire donne $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$. En remplaçant t dans $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \times \frac{x}{v_0 \cos\alpha},$$

et, avec $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$:

$$\boxed{y = f(x) = -\frac{g}{2\,v_0^2 \cos^2\alpha}\,x^2 + \tan\alpha \times x}$$

C'est l'équation d'une parabole tournée vers le bas (coefficient de x^2 négatif).

4) Le ballon entre dans la cage à mi-hauteur lorsqu'il passe par le point B, situé sur la ligne de but (abscisse D) à la moitié de la hauteur h de la cage :

$$\boxed{x_{\mathrm{B}} = D \quad \text{et} \quad y_{\mathrm{B}} = \frac{h}{2}}$$

5) À la date t_{B}, l'abscisse du ballon vaut D : $x(t_{\mathrm{B}}) = v_0 \cos\alpha \times t_{\mathrm{B}} = D$, d'où

$$\boxed{t_{\mathrm{B}} = \frac{D}{v_0 \cos\alpha}}$$

Les données utiles sont la distance D, la valeur v_0 de la vitesse initiale et l'angle α. (On pourrait aussi écrire $y(t_{\mathrm{B}}) = \dfrac{h}{2}$, mais cette équation du second degré a deux solutions : la condition sur x est plus directe.)

6) Au sommet H, le vecteur vitesse est horizontal : sa coordonnée verticale est nulle, $v_y(t_{\mathrm{H}}) = 0$. Donc

$$-g\,t_{\mathrm{H}} + v_0 \sin\alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{t_{\mathrm{H}} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}}$$

Sur le schéma, le ballon passe par H avant d'atteindre B, donc $t_{\mathrm{H}} < t_{\mathrm{B}}$.

Exercice 2 : La spectrométrie de masse et les isotopes du néon

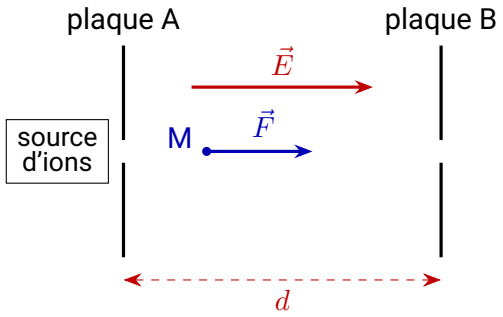
7,5 points

1) Démarche :

- écrire l'expression des valeurs des deux forces : le poids $P = m\,g$ et la force électrique $F = e\,E = \dfrac{e\,U}{d}$;
- rechercher les valeurs numériques nécessaires : masse de l'ion (environ 20 fois la masse d'un nucléon), charge élémentaire e, tension U, distance d, intensité de la pesanteur g ;
- calculer le rapport $\dfrac{P}{F} = \dfrac{m\,g\,d}{e\,U}$;
- conclure : si ce rapport est très inférieur à 1 (plusieurs ordres de grandeur d'écart, par exemple inférieur à 10^{-3}), le poids est négligeable devant la force électrique.

Ordre de grandeur, pour information (valeurs typiques, non fournies par l'énoncé) : avec $m \approx 20 \times 1{,}66 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} \approx 3{,}3 \times 10^{-26}\,\mathrm{kg}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{N{\cdot}kg^{-1}}$, $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $U = 1{,}0\,\mathrm{kV}$ et $d = 1{,}0\,\mathrm{cm}$, on trouverait $P \approx 3{,}3 \times 10^{-25}\,\mathrm{N}$ et $F \approx 1{,}6 \times 10^{-14}\,\mathrm{N}$, soit $\dfrac{P}{F} \approx 2 \times 10^{-11}$.

2) L'ion part de A avec une vitesse négligeable et il est accéléré en ligne droite vers B. La force électrique, seule force prise en compte, a donc la direction et le sens de son accélération : elle est **perpendiculaire aux plaques et orientée de A vers B**. On la représente en M par une flèche horizontale dirigée vers la plaque B (longueur sans échelle imposée).



3) La force électrique et le champ sont liés par $\vec{F} = q\,\vec{E}$, ici $\vec{F} = +e\,\vec{E}$. Comme $e > 0$, $\vec{E}$ a la même direction et le même sens que $\vec{F}$: le champ électrique est **perpendiculaire aux plaques et orienté de A vers B**. Il est uniforme : on peut le représenter n'importe où entre les plaques par la même flèche (voir le schéma ci-dessus).

4) Puisque le champ est uniforme, $\vec{F} = e\,\vec{E}$ garde la même valeur, la même direction et le même sens entre les deux plaques. On note encore A et B les points où l'ion traverse les plaques ; $\mathrm{AB} = d$. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, colinéaire à $\vec{F}$ et de même sens, mesure d ; le travail vaut donc :

$$W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = F\times d\times\cos 0 = e\,E\times d = e\times\frac{U}{d}\times d \quad\Longrightarrow\quad \boxed{W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}) = e\,U}$$

Ce travail est positif : la force électrique est motrice.

5) On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ion, entre A et B : la variation de son énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces qu'il subit, ici le seul travail de $\vec{F}$:

$$E_{\mathrm{c}}(\mathrm{B}) - E_{\mathrm{c}}(\mathrm{A}) = W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}) = e\,U.$$

La vitesse en A est négligeable, donc $E_{\mathrm{c}}(\mathrm{A}) = 0$ et $\frac{1}{2}\,m\,v_{\mathrm{B}}^2 = e\,U$, soit $v_{\mathrm{B}}^2 = \frac{2\,e\,U}{m}$. La vitesse étant positive :

$$\boxed{v_{\mathrm{B}} = \sqrt{\frac{2\,e\,U}{m}}}$$

6)

a. La force électrique vaut $F = e\,E$: elle ne dépend que de la charge de l'ion et du champ, pas de sa masse. L'ion néon 22 a la même charge $+e$ et se trouve dans le même champ : il subit une force électrique de **même valeur**.

b. Le résultat de la question 5 s'applique avec la masse m' : $v'_{\mathrm{B}} = \sqrt{\frac{2\,e\,U}{m'}}$. La vitesse varie comme l'inverse de la racine carrée de la masse ; comme $m' > m$, $\boxed{v'_{\mathrm{B}} < v_{\mathrm{B}}}$: l'ion néon 22, plus lourd, sort moins vite.

c. $E'_{\mathrm{c}}(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}\,m'\,v'^2_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\,m'\times\frac{2\,e\,U}{m'} = e\,U$, et de même $E_{\mathrm{c}}(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}\,m\times\frac{2\,e\,U}{m} = e\,U$. Donc

$$\boxed{E'_{\mathrm{c}}(\mathrm{B}) = E_{\mathrm{c}}(\mathrm{B}) = e\,U}$$

Autre façon de le voir : les deux ions reçoivent le même travail $e\,U$ en partant du repos ; la masse plus grande de l'ion néon 22 est exactement compensée par sa vitesse plus faible.

Exercice 3 : Jongleur débutant

4 points

1) Un système est en chute libre lorsqu'il n'est soumis qu'à son poids : toutes les autres actions (frottements de l'air, poussée d'Archimède) sont négligées.

2) La variation de l'énergie mécanique d'un système est égale au travail des forces non conservatives qu'il subit. En chute libre, la balle ne subit que son poids, qui est une force conservative : son travail ne dépend que des altitudes de départ et d'arrivée, et il est égal à l'opposé de la variation d'énergie potentielle de pesanteur, $W(\vec{P}) = -\Delta E_{\text{pp}}$.

Le théorème de l'énergie cinétique donne alors $\Delta E_{\text{c}} = W(\vec{P}) = -\Delta E_{\text{pp}}$, soit $\Delta E_{\text{c}} + \Delta E_{\text{pp}} = \Delta E_{\text{m}} = 0$: l'énergie mécanique de la balle reste constante pendant tout le mouvement.

3) **a.** On prend l'énergie potentielle de pesanteur nulle au niveau du sol : $E_{\text{pp}} = m\,g\,z$. Au point B, la balle atteint son altitude maximale : lancée verticalement, elle s'y arrête avant de redescendre, donc $v_{\text{B}} = 0$.

Conservation de l'énergie mécanique entre A et B : $E_{\text{m}}(\text{A}) = E_{\text{m}}(\text{B})$, soit

$$\frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + m\,g\,h = 0 + m\,g\,z_{\text{B}}.$$

En divisant par $m\,g$:

$$\boxed{z_{\text{B}} = h + \frac{v_0^2}{2\,g}}$$

On vérifie que $z_{\text{B}} > h$: la balle monte bien au-dessus du point de lancer.

b. Conservation de l'énergie mécanique entre A et C, avec $z_{\text{C}} = 0$: $E_{\text{m}}(\text{A}) = E_{\text{m}}(\text{C})$, soit

$$\frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v_{\text{C}}^2 + 0.$$

En simplifiant par m et en multipliant par 2 : $v_{\text{C}}^2 = v_0^2 + 2\,g\,h$, d'où

$$\boxed{v_{\text{C}} = \sqrt{v_0^2 + 2\,g\,h}}$$

On a $v_{\text{C}} > v_0$: entre A et C, l'énergie potentielle $m\,g\,h$ perdue par la balle s'est convertie en énergie cinétique. La masse de la balle n'intervient pas dans le résultat.