Détection et habitabilité d'une exoplanète

Bac S 2016 Amérique du Nord (ancien programme) · Exercice 2 **5 points** **Durée conseillée 50 min**

1.1 Quelles mesures, réalisées à l'observatoire de Haute-Provence, ont permis de tracer la courbe du document 2 ? Expliquer la démarche des chercheurs.

Données utiles $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$ avec $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_{\text{mesurée}}$; $\lambda = 656{,}2$ nm

Les chercheurs ont enregistré le spectre de raies de l'étoile pendant plusieurs nuits. Sur chaque spectre, ils ont mesuré la longueur d'onde $\lambda_{\text{mesurée}}$ d'une raie dont la valeur de référence λ est connue.

Ils ont alors calculé le décalage spectral $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_{\text{mesurée}}$, puis la vitesse radiale de l'étoile à cette date grâce à l'effet Doppler :

$$v = c \times \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

En reportant chaque vitesse en fonction de la date de la mesure, ils ont obtenu les points du document 2, puis la courbe modélisée.

Mesures : les longueurs d'onde des raies du spectre de l'étoile, nuit après nuit ; on en déduit $v = c \times \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ à chaque date.

PIÈGE
Répondre « ils ont mesuré la vitesse ». La vitesse n'est pas mesurée directement : la grandeur mesurée est une longueur d'onde, la vitesse est calculée.

COMPRENDRE
Quand l'étoile se rapproche de la Terre, la raie est perçue à une longueur d'onde plus courte (décalage vers le bleu) ; quand elle s'éloigne, à une longueur d'onde plus grande (vers le rouge). Le décalage oscille donc au rythme de l'orbite.

1.2 Déterminer la période de révolution de l'étoile du système HD 189733 ainsi que celle de l'exoplanète.

Données utiles document 2 : courbe de la vitesse radiale entre les dates 2454300 et 2454310 (en jours)

Sur le document 2, la courbe part d'un minimum à la date 2454300 et arrive à un maximum à la date 2454310 : elle décrit 4,5 périodes en 10 jours.

$$T = \frac{10}{4{,}5} = 2{,}2 \text{ jours}$$

soit $T = 2{,}22 \times 24 \times 3600 = 1{,}92 \times 10^5$ s (valeur gardée pour la suite).

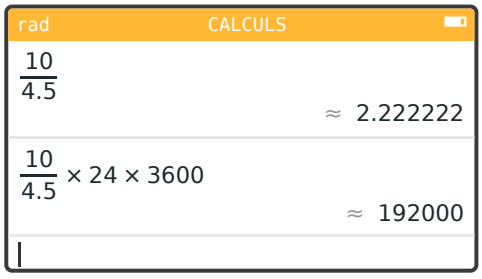
D'après le document 1, la période du mouvement de l'étoile est aussi celle de la planète.

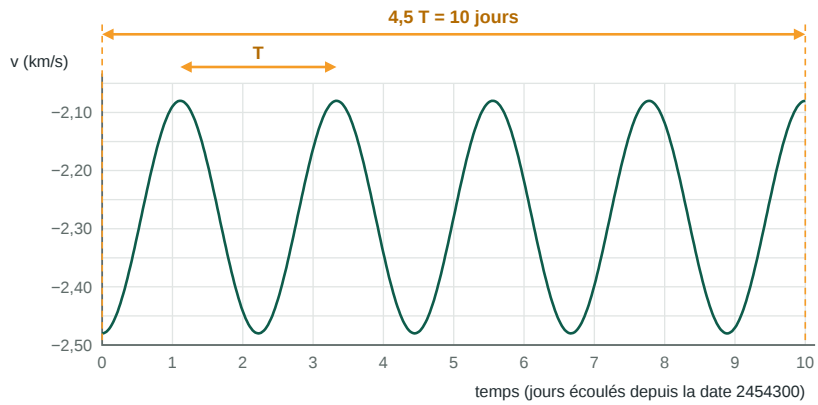
$T_{\text{étoile}} = T_{\text{planète}} \approx 2{,}2 \text{ jours} \approx 1{,}9 \times 10^5 \text{ s}$

COMPRENDRE
Une lecture graphique donne deux chiffres significatifs : on annonce 2,2 jours. On garde un chiffre de plus dans les calculs suivants pour ne pas cumuler les arrondis.

MÉTHODE
Mesurer plusieurs périodes d'un coup, sur toute la largeur du graphe, puis diviser : l'erreur de lecture est répartie sur 4,5 périodes au lieu d'une seule.

À LA CALCULATRICE





1.2 · Document 2 reproduit : entre les dates 2454300 (minimum) et 2454310 (maximum), la courbe décrit 4,5 périodes

1.3 Quelle est la nature de la trajectoire de l'exoplanète autour du centre de gravité G ?

La courbe du document 2 est une sinusoïde : les variations de la vitesse radiale sont régulières et symétriques, sans « pics ».

D'après le document 1, cette forme correspond à une orbite circulaire.

La trajectoire de l'exoplanète autour de G est un **cercle**.

PIÈGE
Dire que la trajectoire est une sinusoïde. La sinusoïde est la courbe de la vitesse en fonction du temps, pas le chemin suivi par la planète.

1.4 Le centre de gravité G étant confondu avec le centre de l'étoile, montrer que le mouvement de l'exoplanète est nécessairement uniforme.

Deuxième loi de Kepler (loi des aires) : le segment qui relie le centre de l'étoile à la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.

La trajectoire est un cercle centré sur l'étoile (1.3) : le segment garde une longueur constante R. Deux aires égales balayées correspondent alors à deux arcs de même longueur L.

Pendant des durées égales Δt, la planète parcourt donc des distances égales : sa vitesse $v = \dfrac{L}{\Delta t}$ garde la même valeur.

La valeur de la vitesse est constante : le mouvement de l'exoplanète est circulaire **uniforme**.

PIÈGE
Uniforme ne veut pas dire « vecteur vitesse constant ». Seule la valeur de la vitesse est constante ; sa direction change à chaque instant.

COMPRENDRE
Autre démonstration possible : la force gravitationnelle est dirigée vers le centre du cercle, donc l'accélération n'a pas de composante tangentielle, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$. C'est le calcul mené à la question 2.2.

2.1 Énoncer la troisième loi de Kepler.

Pour toutes les planètes en orbite autour d'une même étoile, le carré de la période de révolution T est proportionnel au cube du demi-grand axe a de l'orbite.

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante}$$

COMPRENDRE
La constante est la même pour tous les corps qui tournent autour du même astre : elle ne dépend que de la masse de cet astre. Pour une orbite circulaire, a est le rayon R.

2.2 Montrer, avec la deuxième loi de Newton et en explicitant les différents termes, que pour une trajectoire circulaire cette loi s'écrit $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M}$.

Système {exoplanète}, de masse m constante ; référentiel lié au centre de l'étoile, supposé galiléen. Seule force : l'attraction gravitationnelle de l'étoile de masse M, dirigée vers le centre de l'étoile.

Dans le repère de Frenet $(\vec{u}_N, \vec{u}_T)$ lié à la planète, $\vec{u}_N$ pointant vers l'étoile : $\vec{F} = \frac{G\,m\,M}{R^2}\,\vec{u}_N$, où R est le rayon de l'orbite.

Deuxième loi de Newton : $\vec{F} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \frac{G\,M}{R^2}\,\vec{u}_N$.

Or, pour un mouvement circulaire : $\vec{a} = \frac{v^2}{R}\,\vec{u}_N + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_T$.

Par identification selon $\vec{u}_N$: $\frac{v^2}{R} = \frac{G\,M}{R^2}$, soit $v^2 = \frac{G\,M}{R}$.

Le mouvement est uniforme : la planète parcourt le périmètre $2\pi R$ pendant la période T, donc $v = \frac{2\pi R}{T}$.

$$\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{G\,M}{R} \quad \text{d'où} \quad T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{G\,M}$$

$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M}$: c'est bien la relation attendue.

PIÈGE
La masse m de la planète se simplifie : dans la constante, M est la masse de l'astre attracteur, ici l'étoile, pas celle de la planète.

MÉTHODE
Toujours le même enchaînement : système, référentiel, force ; deuxième loi de Newton ; accélération dans le repère de Frenet ; identification pour obtenir v ; puis $v = \frac{2\pi R}{T}$ pour faire apparaître la période.

2.3 En déduire la distance moyenne entre la planète et l'étoile.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$; $M = 0{,}82 \times M_0$ avec $M_0 = 1{,}989 \times 10^{30}$ kg ; $T = 1{,}92 \times 10^5$ s (1.2)

Masse de l'étoile : $M = 0{,}82 \times 1{,}989 \times 10^{30} = 1{,}63 \times 10^{30}$ kg.

D'après 2.2 : $R^3 = \frac{G\,M\,T^2}{4\pi^2}$, soit $R = \sqrt[3]{\frac{G\,M\,T^2}{4\pi^2}}$

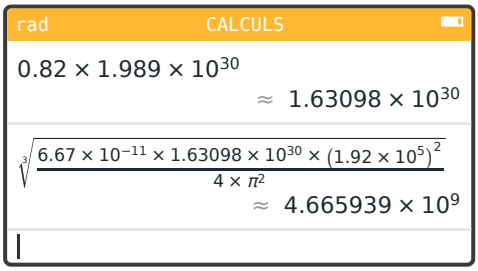
$$R = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}63 \times 10^{30} \times (1{,}92 \times 10^5)^2}{4\pi^2}}$$

$R = 4{,}7 \times 10^9$ m, soit environ 4,7 millions de kilomètres.

PIÈGE
Laisser T en jours : la période doit être en secondes pour obtenir R en mètres. Autre oubli fréquent : le facteur 0,82 devant la masse du Soleil.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme la période lue sur le graphe et le facteur 0,82.

À LA CALCULATRICE



2.4 La planète du système HD 189733 appartient-elle à la zone d'habitabilité ?

Données utiles $1\ \text{U.A.} = 1{,}50 \times 10^8$ km ; zone d'habitabilité du Soleil : de 0,723 U.A. (Vénus) à 1,52 U.A. (Mars) ; $R = 4{,}67 \times 10^9$ m (2.3)

Conversion : $1\ \text{U.A.} = 1{,}50 \times 10^{11}$ m, donc

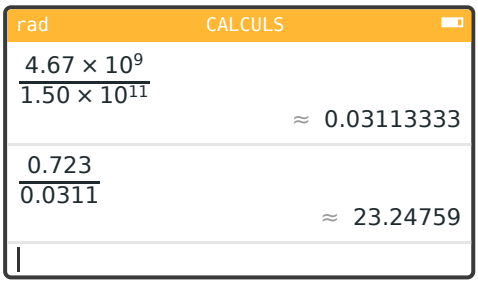
$$R = \frac{4{,}67 \times 10^9}{1{,}50 \times 10^{11}} = 0{,}031\ \text{U.A.}$$

L'étoile a des caractéristiques proches de celles du Soleil (document 2) : sa zone d'habitabilité est voisine de celle du Soleil, entre 0,723 U.A. et 1,52 U.A. environ (document 3).

Or $0{,}031\ \text{U.A.} < 0{,}723\ \text{U.A.}$: la planète est beaucoup trop proche de son étoile. Elle reçoit trop d'énergie pour que l'eau y reste liquide.

$R \approx 0{,}031$ U.A. : l'exoplanète n'appartient **pas** à la zone d'habitabilité.

À LA CALCULATRICE



PIÈGE

Comparer des mètres à des unités astronomiques, ou convertir 1 U.A. sans passer des kilomètres aux mètres. Il faut aussi justifier pourquoi on peut reprendre la zone d'habitabilité du Soleil.

COMPRENDRE

La planète est environ 23 fois plus près de son étoile que Vénus ne l'est du Soleil : cela justifie le nom de « Jupiter chaud » donné dans l'introduction.