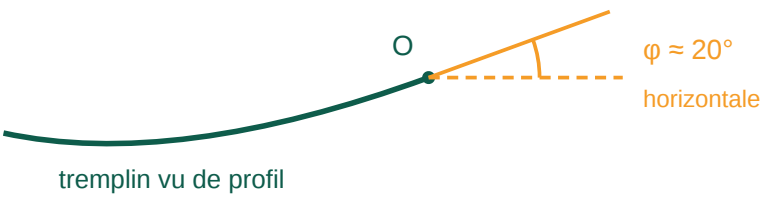
Water Jump

Bac S 2017 Amérique du Sud (ancien programme) · Exercice 1 **6 points** **Durée conseillée 50 min**

1.1 Par des mesures, estimer l'angle φ du tremplin photographié de profil.

Sur la photographie de profil, on trace l'horizontale et la droite qui prolonge l'extrémité du tremplin, puis on mesure au rapporteur l'angle entre les deux.

$\varphi \approx 20^\circ$



1.1 · Angle à mesurer à la sortie du tremplin

COMPRENDRE
Une mesure sur photographie est peu précise (perspective, épaisseur du trait) : quelques degrés d'écart sont acceptables. Il suffit ici de trancher entre 20° et 45°.

MÉTHODE
Sans rapporteur : construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse suit le tremplin, mesurer à la règle le côté vertical et le côté horizontal, puis calculer $\varphi = \arctan\left(\frac{\text{côté vertical}}{\text{côté horizontal}}\right)$.

1.2 S'agit-il du tremplin débutant ou expert ?

Données utiles tremplin débutant : $\varphi_1 = 20^\circ$; tremplin expert : $\varphi_2 = 45^\circ$; $\varphi \approx 20^\circ$ (1.1)

L'angle mesuré est voisin de $\varphi_1 = 20^\circ$ et nettement inférieur à $\varphi_2 = 45^\circ$.

Il s'agit du tremplin **débutant**.

1.3 Quel est l'intérêt d'humidifier le toboggan avant son utilisation ?

L'eau forme un film entre la piste et les skis : elle réduit les frottements, ce qui permet au skieur de prendre le plus de vitesse possible.

COMPRENDRE
C'est ce qui rend acceptable l'hypothèse de l'énoncé, « les frottements seront négligés », utilisée dans toute la suite.

1.4 Exprimer l'énergie mécanique E_{mA} du skieur à l'instant initial, lorsqu'il s'élance du point A sans vitesse initiale.

Données utiles origine de l'énergie potentielle de pesanteur au sol ; altitude de A : H_1 (tremplin débutant)

$$E_{mA} = E_{cA} + E_{ppA} = \frac{1}{2} m v_A^2 + m g H_1$$

Le skieur part sans vitesse : $v_A = 0$, donc $E_{cA} = 0$.

$E_{mA} = m g H_1$

PIÈGE
L'altitude se compte depuis le sol, origine de l'énergie potentielle : en A elle vaut H_1, et non $H_1 - h_1$.

1.5 Déterminer la relation entre l'énergie mécanique E_{mO} au moment où le skieur quitte la piste en O et l'énergie mécanique E_{mA}. Justifier.

Entre A et O, le skieur est soumis à son poids, force conservative, et à la réaction de la piste. Sans frottement, cette réaction est perpendiculaire au déplacement : elle ne travaille pas.

Aucune force non conservative ne travaille, donc l'énergie mécanique se conserve.

$$E_{mO} = E_{mA}$$

PIÈGE
Écrire « il n'y a que le poids » : la piste agit aussi sur le skieur. La justification attendue est que sa réaction ne travaille pas en l'absence de frottement.

1.6 Déterminer la vitesse du skieur au point O.

Données utiles $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $H_1 = 3{,}5\ \text{m}$; $h_1 = 0{,}85\ \text{m}$

En O, le skieur est à l'altitude h_1 avec la vitesse v_O : $E_{mO} = \frac{1}{2} m v_O^2 + m g h_1$.

Conservation de l'énergie mécanique (1.5) : $\frac{1}{2} m v_O^2 + m g h_1 = m g H_1$

En simplifiant par m : $v_O^2 = 2 g (H_1 - h_1)$, soit $v_O = \sqrt{2 g (H_1 - h_1)}$

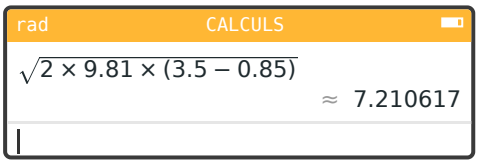
$$v_O = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times (3{,}5 - 0{,}85)}$$

$$v_O = 7{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

PIÈGE
Oublier l'énergie potentielle en O. Le point O n'est pas au sol : seul le dénivelé $H_1 - h_1$ est converti en énergie cinétique.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme H_1 et h_1. La masse se simplifie : la vitesse de sortie est la même pour tous les skieurs, quelle que soit leur masse.

À LA CALCULATRICE



1.7 Le skieur s'élance depuis le tremplin médian. Expliquer qualitativement comment varie son énergie mécanique par rapport à la situation précédente.

Données utiles $H_2 = 7{,}0\ \text{m}$; $H_1 = 3{,}5\ \text{m}$; $E_{mA} = m g H$ (1.4)

L'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle de pesanteur au départ : $E_m = m g H$. Elle est proportionnelle à la hauteur H du point de départ.

Le skieur part de plus haut ($H_2 = 2 H_1$) : son énergie mécanique est plus grande, elle est doublée.

1.8 Peut-on affirmer que la vitesse du skieur à la sortie du tremplin double lorsque la hauteur du toboggan double ? Justifier qualitativement.

Données utiles $v_O = \sqrt{2 g (H - h)}$ (1.6)

D'après 1.6, $v_O = \sqrt{2 g (H - h)}$: la vitesse varie comme la racine carrée du dénivelé $H - h$. Elle n'est pas proportionnelle à H.

Non : quand H double, la vitesse augmente mais ne double pas.

COMPRENDRE
Doubler la vitesse revient à quadrupler l'énergie cinétique, car $E_c = \frac{1}{2} m v^2$. Il faudrait donc un dénivelé $H - h$ quatre fois plus grand.

2.1 En détaillant le raisonnement et en précisant la loi utilisée, exprimer le vecteur accélération $\vec{a}$ du skieur lorsqu'il a quitté le toboggan.

Système {skieur et son équipement}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces : après O, les frottements étant négligés, le skieur n'est soumis qu'à son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$ (chute libre).

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$.

$$\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

MÉTHODE
Toujours quatre étapes : système, référentiel galiléen, bilan des forces, deuxième loi de Newton. Chacune rapporte des points, même quand le résultat est connu d'avance.

2.2 Le chronomètre est déclenché lorsque le skieur est en O. Déduire de la question précédente les équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ du mouvement dans le repère (O, x, z).

Données utiles $\vec{a} = \vec{g}$ (2.1) ; à $t = 0$: skieur en O, vitesse $\vec{v}_0$ faisant l'angle φ avec l'horizontale

L'axe (Oz) est vertical vers le haut et $\vec{g}$ vers le bas : $a_x = 0$; $a_z = -g$

Comme $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives : $v_x = C_1$; $v_z = -g\,t + C_2$

À $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$ de coordonnées $(v_0 \cos\varphi\ ;\ v_0 \sin\varphi)$, donc $C_1 = v_0 \cos\varphi$ et $C_2 = v_0 \sin\varphi$:

$$v_x = v_0 \cos\varphi \quad ; \quad v_z = -g\,t + v_0 \sin\varphi$$

Comme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$, on cherche à nouveau les primitives :

$$x = v_0 \cos\varphi \cdot t + C_3 \quad ; \quad z = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0 \sin\varphi \cdot t + C_4$$

À $t = 0$, le skieur est en O : $x(0) = 0$ et $z(0) = 0$, donc $C_3 = 0$ et $C_4 = 0$.

$$\boxed{x(t) = v_0 \cos\varphi \cdot t \quad \text{et} \quad z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0 \sin\varphi \cdot t}$$

PIÈGE
Oublier les constantes d'intégration, ou les donner sans justification. Chaque constante se détermine par une condition initiale écrite sur la copie : la vitesse initiale, puis la position initiale.

COMPRENDRE
Le signe « $-$ » de a_z vient de l'orientation de l'axe (Oz), vers le haut, alors que $\vec{g}$ pointe vers le bas.

3.1 Que vaut la composante de la vitesse du skieur suivant z lorsqu'il atteint son point culminant ?

Au point culminant, le skieur cesse de monter et commence à descendre : v_z change de signe. Le vecteur vitesse est alors horizontal.

$$\boxed{v_z = 0}$$

PIÈGE
Écrire que la vitesse est nulle au sommet. Seule la composante verticale s'annule : $v_x = v_0 \cos\varphi$ reste constante pendant tout le saut.

3.2 Le skieur atteint sa hauteur maximale à l'instant t_{max}. Exprimer t_{max} en fonction de v_O, g et φ.

Données utiles $v_z(t) = -g\,t + v_0 \sin\varphi$ (2.2), avec $v_0 = v_O$

Au point culminant $v_z(t_{max}) = 0$ (3.1), soit $-g\,t_{max} + v_O \sin\varphi = 0$.

$$\boxed{t_{max} = \frac{v_O \sin\varphi}{g}}$$

COMPRENDRE
Le sujet note la vitesse en O tantôt v_0 (équations horaires), tantôt v_O : il s'agit de la même grandeur.

3.3 À l'aide des équations horaires, montrer que l'ordonnée correspondante vaut $z_{max} = \dfrac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g}$.

Données utiles $z(t) = -\dfrac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin\varphi \cdot t$ (2.2) ; $t_{max} = \dfrac{v_0 \sin\varphi}{g}$ (3.2)

$$z_{max} = z(t_{max}) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\varphi}{g} \right)^2 + v_0 \sin\varphi \times \frac{v_0 \sin\varphi}{g}$$

$$z_{max} = -\frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{g}$$

$z_{max} = \dfrac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g}$, ce qui est bien l'expression attendue.

MÉTHODE
Vérifier l'homogénéité : v_0^2 en $\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}$ divisé par g en $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ donne des mètres, et $\sin^2 \varphi$ est sans unité.

3.4 Calculer la hauteur maximale atteinte H_{max} au-dessus du plan d'eau si le skieur utilise le tremplin averti.

Données utiles $v_O = 5{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $\varphi_2 = 45^\circ$; $h_2 = 1{,}7\ \mathrm{m}$; $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

z_{max} est repérée à partir de O, lui-même situé à la hauteur h_2 au-dessus de l'eau :

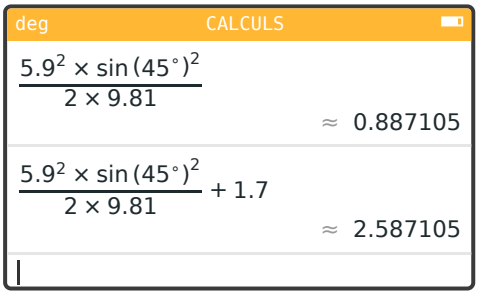
$$H_{max} = z_{max} + h_2 = \frac{v_O^2 \sin^2 \varphi_2}{2g} + h_2$$

$$H_{max} = \frac{5{,}9^2 \times \sin^2(45^\circ)}{2 \times 9{,}81} + 1{,}7 = 0{,}89 + 1{,}7$$

$H_{max} = 2{,}6\ \mathrm{m}$

PIÈGE
Répondre $z_{max} = 0{,}89$ m. L'origine du repère est en O, pas au niveau de l'eau : il faut ajouter h_2. Vérifier aussi que la calculatrice est en mode degrés.

À LA CALCULATRICE



3.5 En tant qu'entraîneur, choisir le tremplin à utiliser pour que les skieurs fassent un maximum de figures en vol. Justifier à l'aide de l'expression de z_{max}.

Données utiles $z_{max} = \dfrac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g}$ (3.3) ; $v_0^2 = 2\,g\,(H-h)$ (1.6) ; tableau des quatre tremplins

Il faut le saut le plus haut, donc z_{max} maximale. Or z_{max} augmente avec la vitesse v_0 et avec l'angle φ.

Avec $v_0^2 = 2\,g\,(H-h)$: $\quad z_{max} = \dfrac{2\,g\,(H-h)\,\sin^2\varphi}{2g} = (H-h)\,\sin^2\varphi$

- débutant : $z_{max} = (3{,}5 - 0{,}85) \times \sin^2(20^\circ) = 0{,}31$ m, soit $H_{max} = 1{,}2$ m ;
- médian : $z_{max} = (7{,}0 - 0{,}85) \times \sin^2(20^\circ) = 0{,}72$ m, soit $H_{max} = 1{,}6$ m ;
- averti : $z_{max} = (3{,}5 - 1{,}7) \times \sin^2(45^\circ) = 0{,}90$ m, soit $H_{max} = 2{,}6$ m ;
- expert : $z_{max} = (7{,}0 - 1{,}7) \times \sin^2(45^\circ) = 2{,}7$ m, soit $H_{max} = 4{,}4$ m.

Il faut choisir le tremplin **expert** : le skieur s'élève de 2,7 m au-dessus de O, soit 4,4 m au-dessus de l'eau.

PIÈGE

Choisir le médian parce que la vitesse de sortie y est la plus grande. L'angle compte autant : avec $\varphi = 20^\circ$, l'essentiel de la vitesse est horizontal et le saut reste bas.

COMPRENDRE

L'énoncé renvoie à « la question 2 » pour l'expression de z_{max} : c'est une coquille, elle est établie à la question 3.3.

À LA CALCULATRICE

