Mission Apollo XIV

Bac S 2017 Centres étrangers (ancien programme) · Exercice 1 **9 points** **Durée conseillée 1 h 30**

1.1 Montrer que l'information donnée sur la durée T d'un aller-retour de l'impulsion laser (« quelques secondes ») est correcte.

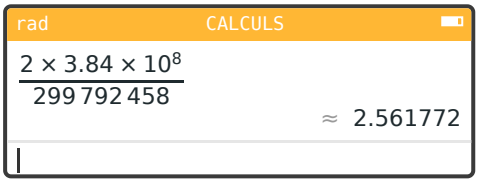
Données utiles $D_{TL} = 3{,}84 \times 10^8$ m ; $c = 299\,792\,458$ m · s^{-1}

L'impulsion fait un aller-retour : elle parcourt la distance $2\,D_{TL}$ à la célérité c.

$$T = \frac{2\,D_{TL}}{c} = \frac{2 \times 3{,}84 \times 10^8}{299\,792\,458} = 2{,}56 \text{ s}$$

$T = 2{,}56$ s : la durée est bien de quelques secondes, l'information est correcte.

À LA CALCULATRICE



PIÈGE

Oublier le facteur 2 : la lumière va jusqu'à la Lune puis revient. Avec un aller simple on trouve 1,28 s, valeur qui ne correspond pas à la durée mesurée.

COMPRENDRE

Trois chiffres significatifs, comme D_{TL}, la donnée la moins précise. La célérité c est donnée avec neuf chiffres : elle ne limite pas la précision du résultat.

1.2 Quel type d'horloge faut-il utiliser pour obtenir la distance D_{TL} à 5 mm près ? Justifier.

Données utiles $U(D_{TL}) = 5$ mm ; $D_{TL} = 3{,}84 \times 10^8$ m ; précisions relatives : quartz 10^{-9}, césium 10^{-16}, optique 10^{-18}

Une distance connue à 5 mm près correspond à $U(D_{TL}) = 5 \times 10^{-3}$ m.

D'après la relation fournie :

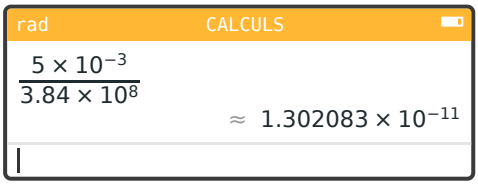
$$\frac{U(T)}{T} = \frac{U(D_{TL})}{D_{TL}} = \frac{5 \times 10^{-3}}{3{,}84 \times 10^8} = 1 \times 10^{-11}$$

L'horloge doit avoir une précision relative inférieure ou égale à 1×10^{-11}.

- Horloge à quartz : $10^{-9} > 10^{-11}$, elle ne convient pas.
- Horloge atomique au césium : $10^{-16} < 10^{-11}$, elle convient.

Il faut au moins une horloge atomique au césium (l'horloge optique, encore plus précise, convient aussi).

À LA CALCULATRICE



PIÈGE

Laisser 5 mm en millimètres alors que D_{TL} est en mètres : le rapport serait faux d'un facteur 1000. Un rapport d'incertitude relative se calcule avec deux grandeurs dans la même unité.

COMPRENDRE

Une précision relative est d'autant meilleure qu'elle est petite. Un seul chiffre significatif suffit ici, comme pour « 5 mm ». Le programme actuel note plutôt l'incertitude-type $u(T)$: le raisonnement est le même.

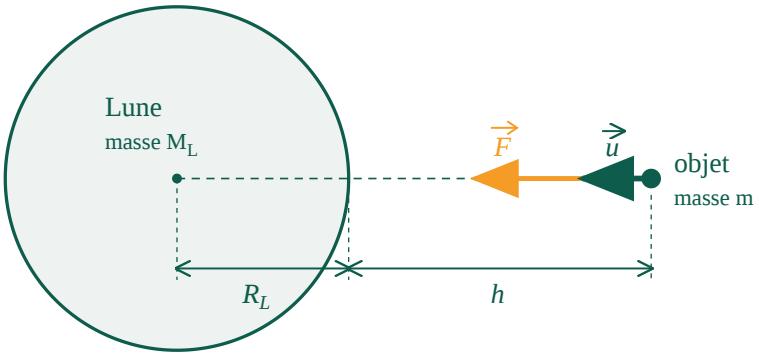
2.1 Faire un schéma d'un objet de masse m à l'altitude h au voisinage de la Lune, avec le vecteur unitaire $\vec{u}$ et la force $\vec{F}$ exercée par la Lune. Donner l'expression vectorielle de cette force.

Schéma ci-contre : $\vec{u}$ et $\vec{F}$ partent de l'objet et pointent tous deux vers le centre de la Lune.

La distance entre l'objet et le centre de la Lune est $R_L + h$. La force est attractive, donc de même sens que $\vec{u}$:

$$\vec{F} = G\,\frac{m\,M_L}{(R_L+h)^2}\,\vec{u}$$

PIÈGE
Écrire h^2 ou R_L^2 au dénominateur : la distance à prendre est celle entre l'objet et le centre de la Lune. Pas de signe « $-$ » non plus, car $\vec{u}$ est déjà orienté vers la Lune.



2.1 · Objet de masse m à l'altitude h : $\vec{u}$ et $\vec{F}$ sont dirigés vers le centre de la Lune

2.2.1 En supposant le poids sur la Lune égal à la force d'interaction gravitationnelle, donner l'expression vectorielle du champ de pesanteur $\vec{g}_L$ à l'altitude h.

Le poids de l'objet sur la Lune s'écrit $\vec{P} = m\,\vec{g}_L$.

Hypothèse : $\vec{P} = \vec{F}$, soit $m\,\vec{g}_L = G\,\dfrac{m\,M_L}{(R_L+h)^2}\,\vec{u}$. En simplifiant par m :

$$\vec{g}_L = G\,\frac{M_L}{(R_L+h)^2}\,\vec{u}$$

COMPRENDRE
La masse m de l'objet disparaît : le champ de pesanteur ne dépend que de l'astre et de la distance à son centre, pas de l'objet qu'on y place.

2.2.2 Calculer la valeur du champ de pesanteur g_L à la surface de la Lune.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$; $M_L = 7{,}33 \times 10^{22}$ kg ; $R_L = 1{,}74 \times 10^3$ km

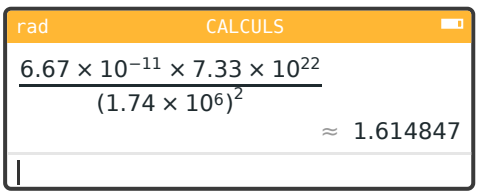
À la surface, $h = 0$, donc $g_L = \dfrac{G\,M_L}{R_L^2}$ avec $R_L = 1{,}74 \times 10^6$ m.

$$g_L = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 7{,}33 \times 10^{22}}{(1{,}74 \times 10^6)^2} = 1{,}61\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$g_L = 1{,}61\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

PIÈGE
Laisser R_L en kilomètres : le résultat serait un million de fois trop grand. Penser aussi au carré sur le rayon, parenthèses comprises à la calculatrice.

À LA CALCULATRICE



2.2.3 Expliquer pourquoi Alan B. Shepard Jr parle de « faible gravité » sur la Lune.

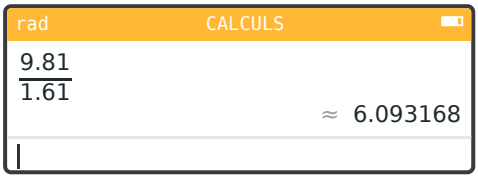
Données utiles $g_T = 9{,}81\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$; $g_L = 1{,}61\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$ (2.2.2)

On compare les deux champs de pesanteur : $\dfrac{g_T}{g_L} = \dfrac{9{,}81}{1{,}61} = 6{,}09$.

Le champ de pesanteur est environ 6 fois plus faible sur la Lune que sur la Terre : un même objet y pèse 6 fois moins, d'où l'expression « faible gravité ».

MÉTHODE
Pour justifier « faible » ou « fort », on compare toujours à une référence par un rapport chiffré. Écrire seulement « 1,61 est plus petit que 9,81 » est moins convaincant qu'un facteur 6.

À LA CALCULATRICE



2.3.1 À partir des coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, montrer que, dans le modèle utilisé, seule la force d'interaction gravitationnelle a été prise en compte.

Données utiles $x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t$; $z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g_L\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t$

On dérive deux fois les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps.

Vitesse $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$: $\quad v_x = v_0\cos\alpha \quad ; \quad v_z = -g_L\,t + v_0\sin\alpha$

Accélération $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$: $\quad a_x = 0 \quad ; \quad a_z = -g_L$

Le champ $\vec{g}_L$ est vertical et dirigé vers le bas : ses coordonnées sont $(0\ ;\ -g_L)$. Donc $\vec{a} = \vec{g}_L$.

Deuxième loi de Newton appliquée à la balle (masse m constante) dans le référentiel lunaire supposé galiléen :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a} = m\,\vec{g}_L = \vec{P}$$

La somme des forces se réduit au poids $\vec{P} = m\,\vec{g}_L$, assimilé à la force d'interaction gravitationnelle (2.2.1) : c'est la seule force prise en compte.

COMPRENDRE
Ce modèle est réaliste sur la Lune, qui n'a pas d'atmosphère : il n'y a ni frottement ni poussée d'Archimède à ajouter au poids.

MÉTHODE
Raisonnement « à l'envers » : des équations horaires on remonte à l'accélération par deux dérivations, puis à la somme des forces par la deuxième loi de Newton.

2.3.2 a) En quoi l'expression de la portée $x_I = \dfrac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g_L}$ est-elle cohérente avec les trajectoires du graphique ? b) À quelle distance la balle aurait-elle été envoyée sur Terre avec les mêmes conditions initiales ? Commenter.

Données utiles portée sur la Lune $x_{I,L} = 470$ m ; $g_L = 1{,}61\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$; $g_T = 9{,}81\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$

a) v_0 et g_L sont les mêmes pour toutes les courbes : la portée ne dépend que de $\sin(2\alpha)$.

- $\sin(2\alpha)$ est maximal, égal à 1, pour $2\alpha = 90^\circ$ soit $\alpha = 45^\circ$: sur le graphique, la trajectoire à 45° retombe bien le plus loin.
- $\sin(2 \times 15^\circ) = \sin(30^\circ)$ et $\sin(2 \times 75^\circ) = \sin(150^\circ)$ sont égaux à 0,5 : les courbes 15° et 75° ont le même point d'impact.
- De même $\sin(60^\circ) = \sin(120^\circ)$: les courbes 30° et 60° se rejoignent au sol.

L'expression est donc cohérente avec le graphique.

b) Mêmes conditions initiales : v_0 et α sont inchangés, seul le champ de pesanteur change. La portée est inversement proportionnelle à g :

$$\frac{x_{I,T}}{x_{I,L}} = \frac{g_L}{g_T} \quad \text{donc} \quad x_{I,T} = x_{I,L} \times \frac{g_L}{g_T} = 470 \times \frac{1{,}61}{9{,}81} = 77{,}1\ \text{m}$$

Sur Terre, la balle irait environ 6 fois moins loin. Par ailleurs, la portée lunaire de 470 m reste très inférieure aux « kilomètres et kilomètres » de l'interview : l'astronaute exagère.

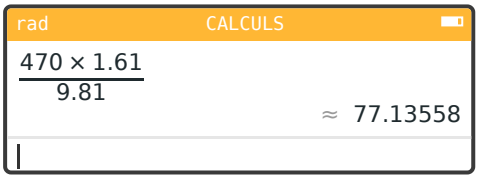
$x_{I,T} = 77{,}1$ m, soit 6 fois moins que sur la Lune.

PIÈGE
Sur Terre, les frottements de l'air ne sont plus négligeables pour une balle de golf : le modèle de la chute libre n'y donne qu'un ordre de grandeur.

COMPRENDRE
Les données sont légèrement incohérentes : avec $\alpha = 45^\circ$ et $v_0 = 100\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, la formule donne 479 m sur la Lune (et 78,7 m sur Terre), pas 470 m. La méthode du rapport évite ce problème.

MÉTHODE
Quand une seule grandeur change entre deux situations, on forme le rapport des deux expressions : tout ce qui est commun (v_0, α) se simplifie, sans conversion ni calcul intermédiaire.

À LA CALCULATRICE



3.1 Donner l'expression de la valeur de l'accélération de la capsule sur son orbite en fonction de G, M_L, h et R_L.

Système {capsule}, de masse m_C constante ; référentiel lunocentrique supposé galiléen ; seule force : l'attraction gravitationnelle de la Lune, $\vec{F} = G\dfrac{m_C\, M_L}{(R_L + h)^2}\vec{u}$.

Deuxième loi de Newton : $\vec{F} = m_C\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = G\dfrac{M_L}{(R_L + h)^2}\vec{u}$.

$$a = \frac{G\, M_L}{(R_L + h)^2}$$

COMPRENDRE
L'accélération est dirigée vers le centre de la Lune (centripète) et ne dépend pas de la masse de la capsule. On reconnaît le champ g_L à l'altitude h (2.2.1).

3.2 Montrer que la valeur de la vitesse de la capsule est $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_L}{R_L + h}}$.

Le mouvement est circulaire et uniforme, de rayon $r = R_L + h$:

l'accélération est centripète, de valeur $a = \dfrac{v^2}{R_L + h}$.

En égalant avec l'expression de la question 3.1 :

$$\frac{v^2}{R_L + h} = \frac{G\,M_L}{(R_L + h)^2} \quad \text{donc} \quad v^2 = \frac{G\,M_L}{R_L + h}$$

$v = \sqrt{\dfrac{G\,M_L}{R_L + h}}$, ce qui est l'expression attendue.

PIÈGE

Prendre R_L ou h seul comme rayon de la trajectoire. Le centre du cercle est le centre de la Lune : le rayon de l'orbite est $R_L + h$.

3.3 Vérifier que la durée entre deux passages successifs de la capsule à la verticale du module lunaire vaut environ 2 h.

Données utiles $R_L = 1{,}74 \times 10^6$ m ; $h = 110$ km $= 1{,}10 \times 10^5$ m ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ m$^3 \cdot$ kg$^{-1} \cdot$ s^{-2} ; $M_L = 7{,}33 \times 10^{22}$ kg

La rotation de la Lune étant négligée, le module lunaire est immobile dans le référentiel lunocentrique : la durée cherchée est la période de révolution $T_{rév}$ de la capsule.

Rayon de l'orbite : $R_L + h = 1{,}74 \times 10^6 + 1{,}10 \times 10^5 = 1{,}85 \times 10^6$ m.

Vitesse : $v = \sqrt{\dfrac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 7{,}33 \times 10^{22}}{1{,}85 \times 10^6}} = 1{,}63 \times 10^3$ m $\cdot$ s^{-1}

En un tour, la capsule parcourt le périmètre $2\pi(R_L + h)$ à la vitesse constante v :

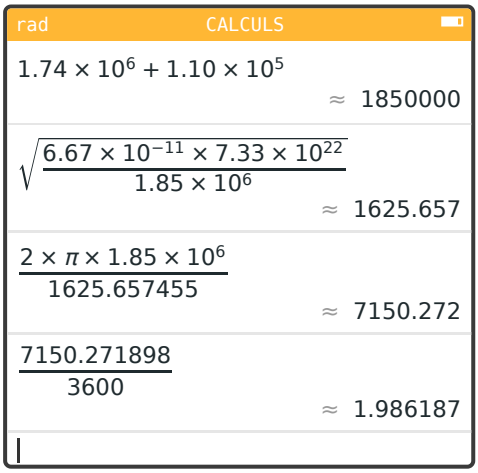
$$T_{rév} = \frac{2\pi\,(R_L + h)}{v} = \frac{2\pi \times 1{,}85 \times 10^6}{1{,}63 \times 10^3} = 7{,}15 \times 10^3 \text{ s}$$

$T_{rév} = 7{,}15 \times 10^3$ s $= 1{,}99$ h, soit environ 2 h : la valeur est vérifiée.

PIÈGE

Additionner R_L et h sans les mettre dans la même unité, ou arrondir v avant de calculer la période : garder la valeur complète en mémoire dans la calculatrice.

À LA CALCULATRICE



3.4 Expliquer pourquoi la communication entre les astronautes sur la Lune et la capsule ne peut se faire que sur la partie de l'orbite représentée en gras.

Les ondes électromagnétiques utilisées pour communiquer se propagent en ligne droite et ne traversent pas la Lune.

La liaison n'est possible que si le segment qui joint le module lunaire à la capsule ne rencontre pas la Lune, c'est-à-dire si la capsule est au-dessus de l'horizon du module (le plan tangent à la surface lunaire au point où il est posé).

Seule la partie de l'orbite située au-dessus de cette tangente, tracée en gras, est en vue directe du module : ailleurs, la Lune fait obstacle.

COMPRENDRE

Aux deux extrémités de l'arc en gras, la droite capsule-module est tangente à la Lune : elle est donc perpendiculaire au rayon R_L. C'est ce triangle rectangle qui sert à la question suivante.

3.5 Quelle est la durée de communication possible à chaque révolution de la capsule ?

Données utiles $R_L = 1{,}74 \times 10^6$ m ; $R_L + h = 1{,}85 \times 10^6$ m ; $T_{rév} = 7{,}15 \times 10^3$ s (3.3)

Dans le triangle formé par le centre de la Lune, le module lunaire et la capsule en limite de visibilité, rectangle au module lunaire :

$$\cos\beta = \frac{R_L}{R_L + h} = \frac{1{,}74 \times 10^6}{1{,}85 \times 10^6} \quad \text{donc} \quad \beta = 19{,}9^\circ$$

L'arc en gras correspond à un angle au centre 2β, de part et d'autre de la verticale du module.

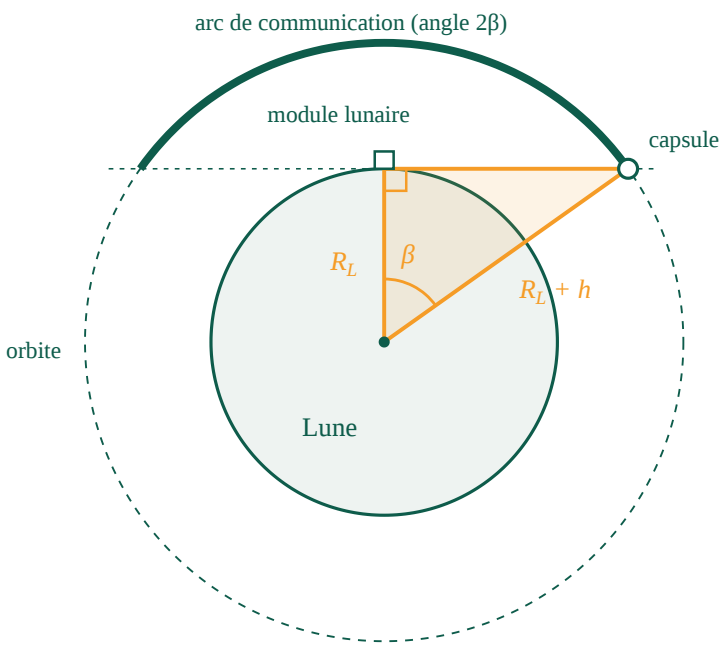
Le mouvement est uniforme : la durée de parcours est proportionnelle à l'angle balayé, et un tour (360°) dure $T_{rév}$.

$$\Delta t = \frac{2\beta}{360^\circ} \times T_{rév} = \frac{2 \times 19{,}86}{360} \times 7{,}15 \times 10^3 = 789 \text{ s}$$

$\Delta t = 789$ s, soit environ 13 min de communication par révolution (sur près de 2 h).

PIÈGE
Oublier le facteur 2 : β ne couvre que la moitié de l'arc en gras. Le calcul utilise les valeurs non arrondies ; avec $19{,}9^\circ$ et $7{,}15 \times 10^3$ s on obtient 790 s, écart sans importance.

MÉTHODE
Mouvement circulaire uniforme : durée et angle balayé sont proportionnels. On passe donc d'un angle à une durée par une simple règle de trois avec la période (calculatrice en mode degrés pour l'arccosinus).



3.5 · Triangle rectangle au module lunaire : $\cos\beta = R_L/(R_L + h)$ (échelles non respectées)

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{1.74 \times 10^6}{1.85 \times 10^6} \approx 0.9405405$

$\dfrac{2 \times 19.857}{360} \times 7150.27 \approx 788.794$

$\dfrac{788.8}{60} \approx 13.14667$