Voyage dans la ceinture d'astéroïdes

Bac S 2018 Métropole rattrapage (ancien programme) · Exercice 2 **11 points** **Durée conseillée 1 h 50**

1.1.1 Calculer la valeur maximale de la longueur d'onde de la radiation qui permettrait d'ioniser un atome de xénon en ion Xe^+.

Données utiles $E_i = 12{,}1$ eV ; $1\text{ eV} = 1{,}60 \times 10^{-19}$ J ; $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J · s ; $c = 3{,}00 \times 10^{8}$ m · s^{-1}

Un photon de longueur d'onde λ transporte l'énergie $E = \dfrac{h\,c}{\lambda}$.

Il ionise l'atome si $E \geqslant E_i$, soit $\lambda \leqslant \dfrac{h\,c}{E_i}$. La plus grande longueur d'onde convenable est donc :

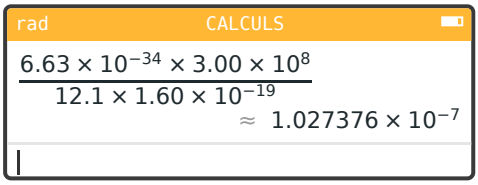
$$\lambda_{\max} = \frac{h\,c}{E_i} = \frac{6{,}63 \times 10^{-34} \times 3{,}00 \times 10^{8}}{12{,}1 \times 1{,}60 \times 10^{-19}} = 1{,}03 \times 10^{-7}\text{ m}$$

$\lambda_{\max} = 1{,}03 \times 10^{-7}\text{ m} = 103\text{ nm}$

PIÈGE
Laisser E_i en électronvolts : la relation exige des joules. Sans conversion, on obtient une longueur d'onde sans aucun sens physique.

COMPRENDRE
Énergie minimale et longueur d'onde maximale vont ensemble, car E et λ varient en sens inverse. Trois chiffres significatifs, comme toutes les données utilisées.

À LA CALCULATRICE



1.1.2 Dans quel domaine d'ondes électromagnétiques se situe cette radiation ? Justifier.

Données utiles $\lambda_{\max} = 103$ nm (1.1.1)

Dans le vide, le domaine visible s'étend de 400 nm à 800 nm environ. Ici $\lambda \leqslant 103\text{ nm} < 400\text{ nm}$.

La radiation appartient au domaine des **ultraviolets**.

1.2.1 Montrer que la masse d'un atome de xénon vaut $m = 2{,}18 \times 10^{-25}$ kg.

Données utiles $M = 131{,}3\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\text{ mol}^{-1}$

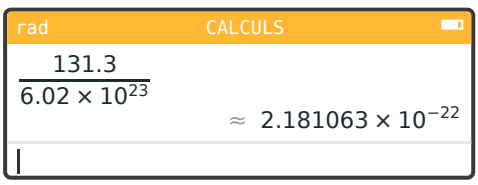
Une mole de xénon contient N_A atomes et a pour masse M, donc :

$$m = \frac{M}{N_A} = \frac{131{,}3}{6{,}02 \times 10^{23}} = 2{,}18 \times 10^{-22}\text{ g}$$

$m = 2{,}18 \times 10^{-25}$ kg : c'est la valeur attendue.

PIÈGE
Le quotient M/N_A sort en grammes puisque M est en g · mol^{-1}. Oublier le facteur 10^{-3} donne 10^{-22} et la démonstration échoue.

À LA CALCULATRICE



1.2.2 Déterminer l'expression du travail $W_{AB}(\overrightarrow{F_e})$ de la force électrique appliquée à un ion xénon allant de la grille A à la grille B, en fonction de e et U.

Données utiles $E = \dfrac{U}{d}$; charge de l'ion Xe^+ : $q = +e$

L'ion porte la charge $q = e$; il subit la force $\overrightarrow{F_e} = e\,\overrightarrow{E}$, constante car le champ est uniforme.

$W_{AB}(\overrightarrow{F_e}) = \overrightarrow{F_e} \cdot \overrightarrow{AB} = e\,E \times AB \times \cos 0$, car $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont même direction et même sens (figure 1).

Avec $AB = d$ et $E = \dfrac{U}{d}$: $\quad W_{AB}(\overrightarrow{F_e}) = e \times \dfrac{U}{d} \times d$

$$\boxed{W_{AB}(\overrightarrow{F_e}) = e\,U}$$

COMPRENDRE
Ce travail est positif : la force est motrice et l'ion accélère. La distance d disparaît, seule la tension entre les grilles compte.

1.2.3 En déduire que la vitesse d'un ion xénon à la sortie de la chambre d'accélération est $v_B = \sqrt{\dfrac{2\,e\,U}{m}}$.

Données utiles $W_{AB}(\overrightarrow{F_e}) = e\,U$ (1.2.2) ; vitesse nulle en A

$E_c(B) - E_c(A) = W_{AB}(\overrightarrow{F_e})$

L'ion part de A sans vitesse, donc $E_c(A) = 0$ et $E_c(B) = \dfrac{1}{2}\,m\,v_B^2$:

$$\frac{1}{2}\,m\,v_B^2 = e\,U \quad \text{soit} \quad v_B^2 = \frac{2\,e\,U}{m}$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{\frac{2\,e\,U}{m}}}$$

1.2.4 Déterminer, pour une tension accélératrice de 300 V, la valeur de la vitesse d'éjection des ions xénon. Commenter.

Données utiles $U = 300$ V ; $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C ; $m = 2{,}18 \times 10^{-25}$ kg (1.2.1)

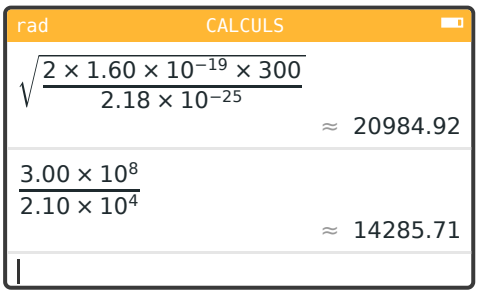
$$v_B = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}60 \times 10^{-19} \times 300}{2{,}18 \times 10^{-25}}} = 2{,}10 \times 10^4 \ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Les ions sortent à environ $21 \ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$: c'est une vitesse très grande à notre échelle, mais elle reste très inférieure à la célérité de la lumière ($3{,}00 \times 10^8 \ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$), environ $14\,000$ fois plus grande.

$$\boxed{v_B = 2{,}10 \times 10^4 \ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

MÉTHODE
« Commenter » une vitesse : la comparer à une référence connue, ici la célérité de la lumière. Comme $v_B \ll c$, l'expression $\frac{1}{2}\,m\,v^2$ de l'énergie cinétique reste valable.

À LA CALCULATRICE



1.3.1 Donner l'expression de la quantité de mouvement $\overrightarrow{p_1}$ de l'atome éjecté et celle, $\overrightarrow{p_2}$, de la sonde de masse $(M_S - m)$ après l'éjection.

La quantité de mouvement d'un système est le produit de sa masse par son vecteur vitesse.

$\overrightarrow{p_1} = m\,\overrightarrow{v_B}$ et $\overrightarrow{p_2} = (M_S - m)\,\overrightarrow{v_S}$

COMPRENDRE
La quantité de mouvement et sa conservation étaient au programme du bac S. Elles ne figurent plus dans le programme actuel de spécialité, où la deuxième loi de Newton s'écrit avec $m\,\vec{a}$.

1.3.2 Justifier la conservation de la quantité de mouvement du système {sonde + atome de xénon} et l'égalité $\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \vec{0}$.

Loin de tout astre, le système {sonde + atome de xénon} ne subit aucune force extérieure : il est isolé.

Dans le référentiel R supposé galiléen, la deuxième loi de Newton donne $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$: la quantité de mouvement $\vec{p}$ du système se conserve.

Avant l'éjection, le système est immobile dans R : $\vec{p}_{\text{avant}} = \vec{0}$. Après l'éjection : $\vec{p}_{\text{après}} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}$.

$\vec{p}_{\text{après}} = \vec{p}_{\text{avant}}$, donc $\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \vec{0}$

PIÈGE
La force qui éjecte l'atome est intérieure au système {sonde + atome} : elle ne modifie pas sa quantité de mouvement totale. Seules les forces extérieures comptent.

1.3.3 En déduire l'expression de v_S en fonction de v_B, M_S et m.

$\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \vec{0}$ s'écrit $(M_S - m)\,\overrightarrow{v_S} = -\,m\,\overrightarrow{v_B}$: les deux vitesses sont de sens opposés, comme sur le schéma.

En valeur : $(M_S - m)\,v_S = m\,v_B$

$$v_S = \frac{m\,v_B}{M_S - m}$$

1.3.4 Calculer la valeur de v_S et commenter le résultat.

Données utiles $v_B = 2{,}1 \times 10^4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $M_S = 1240$ kg ; $m = 2{,}18 \times 10^{-25}$ kg

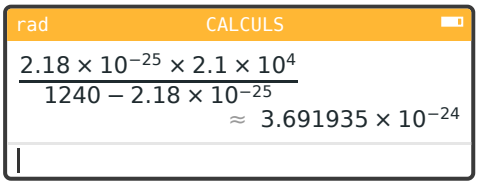
$$v_S = \frac{2{,}18 \times 10^{-25} \times 2{,}1 \times 10^4}{1240 - 2{,}18 \times 10^{-25}} = 3{,}7 \times 10^{-24}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Cette vitesse est infime : un seul atome, de masse dérisoire devant celle de la sonde, ne la met pratiquement pas en mouvement. Il faut éjecter un nombre immense d'atomes, pendant longtemps, pour obtenir une vitesse notable.

$v_S = 3{,}7 \times 10^{-24}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme v_B. Au dénominateur, m est négligeable devant M_S : $v_S \approx \dfrac{m}{M_S}\,v_B$ donne le même résultat.

À LA CALCULATRICE



1.3.5 La sonde a une réserve de 450 kg de xénon. Indiquer pendant combien d'années le moteur ionique peut fonctionner.

Données utiles consommation : 3,3 mg de xénon par seconde

Le débit est constant : $\Delta t = \dfrac{\text{masse de la réserve}}{\text{masse éjectée par seconde}}$, avec $450\ \text{kg} = 450 \times 10^3\ \text{g}$ et $3{,}3\ \text{mg} = 3{,}3 \times 10^{-3}\ \text{g}$.

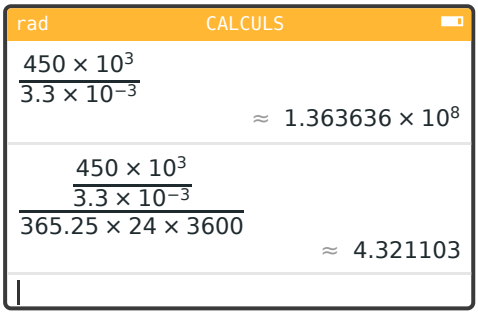
$$\Delta t = \frac{450 \times 10^3}{3{,}3 \times 10^{-3}} = 1{,}4 \times 10^8\ \text{s}$$

Une année dure $365{,}25 \times 24 \times 3600\ \text{s}$, d'où $\Delta t = \dfrac{1{,}4 \times 10^8}{365{,}25 \times 24 \times 3600} = 4{,}3\ \text{ans}$.

Le moteur peut fonctionner environ $4{,}3$ ans en continu.

PIÈGE
Mélanger kilogrammes et milligrammes : les deux masses doivent être dans la même unité avant de diviser. Il y a un facteur 10^6 entre les deux.

À LA CALCULATRICE



1.3.6 Bien que rare et cher, le xénon a été choisi comme gaz de propulsion. À l'aide des données, indiquer deux arguments pour justifier ce choix.

Données utiles tableau : énergies d'ionisation (eV) et propriétés des six éléments testés

- Le xénon est **inerte** : contrairement au sodium, au mercure et au césium, il n'est ni corrosif ni toxique, donc il n'abîme pas le moteur.
- Parmi les trois gaz inertes, c'est celui dont l'**énergie d'ionisation est la plus faible** : 12,1 eV contre 14,0 eV pour le krypton et 15,8 eV pour l'argon. Produire les ions coûte donc moins d'énergie.

Le xénon est inerte et il est le plus facile à ioniser des gaz inertes testés.

PIÈGE
Écrire que le xénon a la plus faible énergie d'ionisation du tableau est faux : le césium (3,89 eV) et le sodium (5,14 eV) s'ionisent plus facilement, mais ils sont corrosifs.

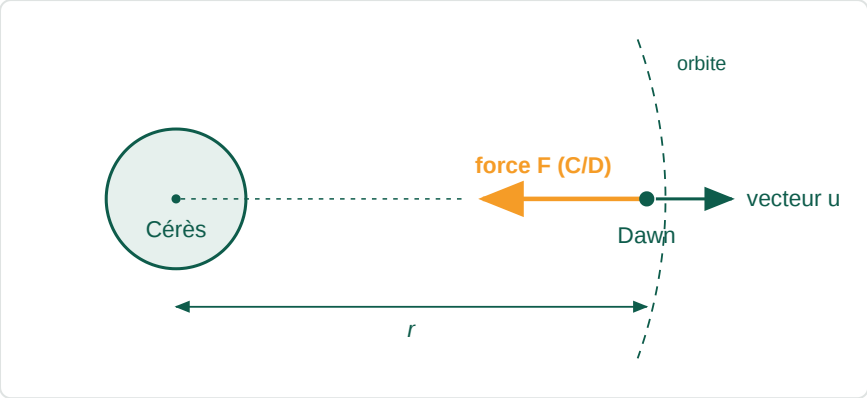
2.1 Donner les caractéristiques de la force exercée par Cérès sur la sonde Dawn, de masse M_D. Faire un schéma représentant cette force.

C'est la force d'interaction gravitationnelle $\overrightarrow{F}_{C/D}$:

- point d'application : le centre de la sonde Dawn ;
- direction : la droite passant par les centres de Cérès et de Dawn ;
- sens : de Dawn vers Cérès (force attractive) ;
- valeur : $F_{C/D} = G\dfrac{M_C\,M_D}{r^2}$, où r est la distance entre les deux centres.

$\overrightarrow{F}_{C/D} = -\,G\dfrac{M_C\,M_D}{r^2}\,\vec{u}$, avec $\vec{u}$ vecteur unitaire dirigé de Cérès vers Dawn.

PIÈGE
La distance r se mesure entre les centres : $r = R + h$, et non l'altitude h seule. Le schéma doit montrer une flèche partant de Dawn et pointant vers Cérès.



2.1 · Force exercée par Cérès sur la sonde Dawn

2.2 Montrer que, dans le cas d'un mouvement circulaire, le mouvement de la sonde Dawn autour de Cérès est uniforme.

Système {sonde Dawn}, de masse M_D constante (moteurs désactivés) ; référentiel lié au centre de Cérès, supposé galiléen ; seule force : $\overrightarrow{F}_{C/D}$.

Deuxième loi de Newton : $\overrightarrow{F}_{C/D} = M_D\,\vec{a}$. Dans le repère de Frenet $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$, la force est dirigée vers le centre de Cérès, donc :

$$\vec{a} = \frac{G\,M_C}{r^2}\,\vec{u}_N$$

Or, pour un mouvement circulaire de rayon r : $\vec{a} = \dfrac{v^2}{r}\,\vec{u}_N + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_T$.

Par identification selon $\vec{u}_T$:

$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$: la valeur de la vitesse est constante, le mouvement circulaire est **uniforme**.

PIÈGE
Dire que l'accélération est constante est faux : sa direction change sans cesse. C'est l'absence de composante tangentielle qui prouve que la vitesse garde la même valeur.

2.3 Établir que la vitesse de la sonde sur son orbite de rayon r est $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_C}{r}}$.

On identifie cette fois les deux expressions de $\vec{a}$ (2.2) selon $\vec{u}_N$:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{G\,M_C}{r^2} \quad \text{soit} \quad v^2 = \frac{G\,M_C}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_C}{r}}$$

COMPRENDRE
La masse M_D de la sonde n'intervient pas : tout objet placé sur cette orbite aurait la même vitesse.

2.4 En déduire l'expression de la troisième loi de Kepler.

Le mouvement étant uniforme, la sonde parcourt la circonférence $2\pi r$ pendant une période T : $v = \dfrac{2\pi r}{T}$, soit $T = \dfrac{2\pi r}{v}$.

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{v^2} = 4\pi^2 r^2 \times \frac{r}{G\,M_C} = \frac{4\pi^2 r^3}{G\,M_C}$$

$\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_C}$: le rapport $\dfrac{T^2}{r^3}$ est le même pour tous les satellites de Cérès (troisième loi de Kepler).

MÉTHODE
Pour obtenir la loi de Kepler sur une orbite circulaire : écrire $T = 2\pi r/v$, élever au carré, puis remplacer v^2 par son expression.

2.5 Déterminer une valeur de la masse de l'astéroïde Cérès dans le cadre de l'hypothèse d'un mouvement circulaire. Commenter.

Données utiles $R = 470$ km ; altitude $h = 13\,500$ km ; $T = 15$ jours ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; valeur donnée : $M_C = (9{,}46 \pm 0{,}04) \times 10^{20}$ kg

D'après la troisième loi de Kepler (2.4) : $M_C = \dfrac{4\pi^2 r^3}{G\,T^2}$

$r = R + h = 470 + 13\,500 = 13\,970\ \text{km} = 1{,}397 \times 10^7\ \text{m}$ et $T = 15 \times 24 \times 3600 = 1{,}296 \times 10^6\ \text{s}$

$$M_C = \frac{4\pi^2 \times (1{,}397 \times 10^7)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (1{,}296 \times 10^6)^2} = 9{,}6 \times 10^{20}\ \text{kg}$$

La valeur obtenue est proche de la valeur donnée (écart d'environ 1,6 %), mais elle sort de l'intervalle $[9{,}42 ; 9{,}50] \times 10^{20}$ kg. L'écart s'explique par les valeurs arrondies de la période (15 jours) et de l'altitude moyenne, et par l'orbite qui n'est que quasi circulaire.

$M_C = 9{,}6 \times 10^{20}$ kg, résultat cohérent avec la valeur donnée compte tenu de la précision des mesures.

PIÈGE

Prendre $r = 13\,500$ km en oubliant le rayon de Cérès, ou laisser T en jours et r en kilomètres : avec G en unités SI, il faut des mètres et des secondes.

COMPRENDRE

Deux chiffres significatifs seulement, car la période n'est connue qu'à deux chiffres. Comme T est au carré, une demi-journée d'erreur sur T change M_C d'environ 7 %.

À LA CALCULATRICE

