EXERCICE II - VOYAGE DANS LA CEINTURE D'ASTÉROÏDES (11 points)

« Le moteur le plus courant de l'univers du film Star Wars est un propulseur ionique. Il est amusant de constater que cette technologie a déjà été réellement utilisée.
La sonde Dawn avait pour mission d'étudier Vesta et Cérès, les deux principaux corps de la ceinture d'astéroïdes. C'est grâce à ses propulseurs ioniques qu'elle a pu passer d'un astéroïde à l'autre.
Le principe du moteur ionique consiste à ioniser un gaz inerte comme le xénon (c'est-à-dire à produire des ions), à l'aide d'un fort courant électrique. Ensuite, un champ électrique intense accélère les ions produits qui, éjectés par une tuyère, propulsent le vaisseau dans la direction opposée à leur flux. Ce mode de propulsion est très économe : à puissances égales, un moteur ionique consomme dix fois moins de combustible qu'un moteur de fusée classique. Cependant, les moteurs ioniques actuels ne produisent que des accélérations assez faibles et sont tout à fait incapables d'exécuter les acrobaties que réalisent les chasseurs interstellaires de Star Wars. »



D'après Roland Lehoucq – « Faire des sciences avec Star Wars »

Données :

- constante d'Avogadro : $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ mol^{-1} ;
- constante de Planck : $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J.s ;
- charge électrique élémentaire : $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C ;
- 1 eV = $1{,}60 \times 10^{-19}$ J ;
- constante de gravitation universelle : G = $6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2} ;
- masse molaire atomique du xénon : $M = 131{,}3$ g.mol^{-1} ;
- la valeur de la célérité c de la lumière dans le vide est supposée connue par le candidat.

Dans cet exercice, on étudiera le principe simplifié de la propulsion ionique, puis dans une partie indépendante, on déterminera la masse de l'astéroïde Cérès.

1. La propulsion ionique

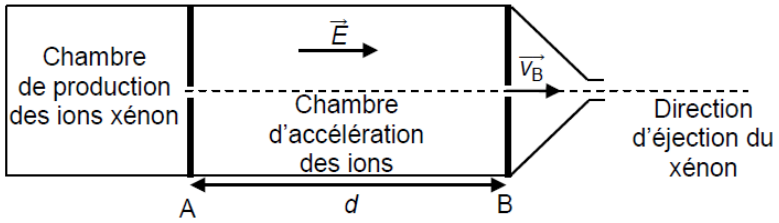


Figure 1. Schéma de principe simplifié d'un moteur ionique.

Les ions xénon créés sont accélérés entre les grilles A et B par un champ électrique $\vec{E}$ supposé uniforme. À la sortie de la chambre d'accélération, un dispositif appelé neutraliseur, transforme les ions xénon en atomes de xénon, afin de maintenir la charge électrique globale de la sonde Dawn constante.

1.1. Étude de l'ionisation du xénon
L'énergie d'ionisation d'un atome est l'énergie minimale nécessaire pour arracher un électron de cet atome.
Dans le cas du moteur ionique, le mécanisme d'ionisation est fondé sur des processus physiques complexes. On étudie ici un mécanisme plus simple au cours duquel le xénon est ionisé par une radiation lumineuse.

1.1.1. L'énergie d'ionisation d'un atome de xénon est égale à 12,1 eV. Calculer la valeur maximale de la longueur d'onde de la radiation qui permettrait l'ionisation d'un atome de xénon en ion Xe^+.

1.1.2. Dans quel domaine d'ondes électromagnétiques se situe cette radiation ? Justifier.

1.2. L'accélération des ions xénon

1.2.1. Montrer que la masse d'un atome de xénon vaut $m = 2{,}18 \times 10^{-25}$ kg.

Pour la suite, on considèrera que la masse d'un atome de xénon est égale à la masse de l'ion xénon.
Les ions xénon Xe^+, de masse m, pénètrent dans la chambre d'accélération en A, avec une vitesse que l'on considèrera nulle. Une tension électrique U constante est appliquée entre les grilles A et B (figure 1).

1.2.2. Déterminer l'expression du travail $W_{AB}\left(\vec{F}_e\right)$ de la force électrique $\vec{F}_e$ appliquée à un ion xénon se déplaçant de la grille A à la grille B en fonction de e et U. On donne la relation entre le champ électrique E, la tension U, et la distance d entre les grilles A et B :

$$E = \frac{U}{d}$$

1.2.3. La variation de l'énergie cinétique des ions xénon entre les grilles A et B, ($E_{c(B)} - E_{c(A)}$) est égale au travail de la force électrique sur ce trajet. En déduire que la vitesse d'un ion xénon à la sortie de la chambre d'accélération est donnée par la relation :

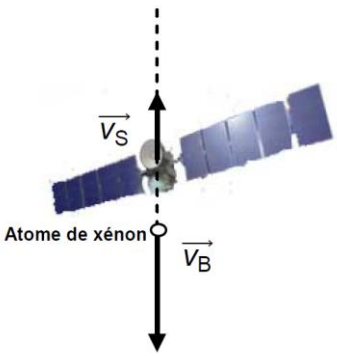
$$v_B = \sqrt{\frac{2e.U}{m}}$$

1.2.4. Déterminer, pour une tension accélératrice de 300 V, la valeur de la vitesse d'éjection des ions xénon. Commenter la valeur obtenue.

1.3. Principe de la propulsion par réaction de la sonde spatiale

On désire illustrer le principe de la propulsion par réaction. On se place dans un référentiel R dans lequel la sonde Dawn est initialement immobile, dans une région de l'espace éloignée de tout astre.
La masse de la sonde Dawn, avant le démarrage du moteur ionique, est égale à $M_S = 1240$ kg.
On étudie dans un premier temps l'éjection d'un seul atome de xénon, de vitesse $\vec{v_B}$ par rapport au référentiel R. Après cette éjection, la sonde de masse ($M_S - m$), acquiert une vitesse $\vec{v_S}$ par rapport à R.

1.3.1. Donner l'expression de la quantité de mouvement $\vec{p_1}$ de l'atome éjecté ainsi que la quantité de mouvement $\vec{p_2}$ de la sonde de masse ($M_S - m$) après l'éjection de l'atome de xénon. Le schéma ci-contre représente la sonde Dawn ; les vecteurs vitesse sont représentés sans souci d'échelle.



1.3.2. Dans la situation étudiée, justifier la conservation de la quantité de mouvement du système {sonde + atome de xénon} et l'égalité suivante : $\vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{0}$.

1.3.3. En déduire l'expression de v_S en fonction de v_B, M_S et m.

1.3.4. Calculer la valeur de v_S et commenter le résultat. On prendra $v_B = 2{,}1 \times 10^4$ m.s^{-1}.

En réalité, le moteur ionique éjecte en continu une grande quantité d'atomes de xénon : il consomme 3,3 mg de xénon par seconde.

1.3.5. La sonde Dawn a une réserve de 450 kg de xénon. Indiquer pendant combien d'années le moteur ionique peut fonctionner.

Les éléments chimiques du tableau ci-dessous ont été testés pour faire fonctionner des moteurs ioniques spatiaux.

Élément chimique	sodium	mercure	césium	argon	krypton	xénon
Énergie d'ionisation (eV)	5,14	10,4	3,89	15,8	14,0	12,1
Propriétés	corrosif	corrosif, toxique	corrosif	inerte	inerte	inerte

1.3.6. Bien que rare et cher, le xénon a été choisi comme gaz de propulsion du moteur ionique de la sonde Dawn. À l'aide des données, indiquer deux arguments pour justifier ce choix.

2. L'astéroïde Cérès

En 2015, la sonde Dawn s'est mise en orbite quasi-circulaire de rayon r autour de l'astéroïde Cérès, astéroïde de rayon moyen R = 470 km. Ses moteurs ioniques désactivés, la sonde Dawn a effectué une révolution autour de Cérès à une altitude moyenne de 13500 km en 15 jours à la vitesse v.

Données :

- masse de Cérès : $M_c = (9{,}46 \pm 0{,}04) \times 10^{20}$ kg.

2.1. Donner les caractéristiques de la force exercée par Cérès sur la sonde Dawn. Faire un schéma représentant cette force. On notera M_D la masse de la sonde Dawn.
2.2. Montrer que, dans le cas d'un mouvement circulaire, le mouvement de la sonde Dawn autour de Cérès est uniforme.
2.3. Établir que la vitesse v de la sonde Dawn sur son orbite de rayon r autour de Cérès est donnée par la relation :

$$v = \sqrt{\frac{G.M_C}{r}}$$

2.4. En déduire l'expression de la troisième loi de Kepler.
2.5. Déterminer une valeur de la masse de l'astéroïde Cérès dans le cadre de l'hypothèse d'un mouvement circulaire. Commenter.