La mission Proxima

Bac S 2018 Liban (ancien programme) · Exercice 1 **11 points** **Durée conseillée 1 h 50**

1.1 À l'aide de la période orbitale du module Soyouz, déterminer la valeur de sa vitesse V_S sur son orbite basse.

Données utiles $R_T = 6380$ km ; $h_S = 220$ km ; $T_S = 88{,}66$ min

L'orbite est circulaire, de rayon $R_T + h_S$. Pendant une période T_S, le module en parcourt la circonférence à vitesse constante :

$$V_S = \frac{2\pi\,(R_T + h_S)}{T_S}$$

avec $R_T + h_S = 6600\ \text{km} = 6{,}600 \times 10^6\ \text{m}$ et $T_S = 88{,}66 \times 60 = 5320\ \text{s}$.

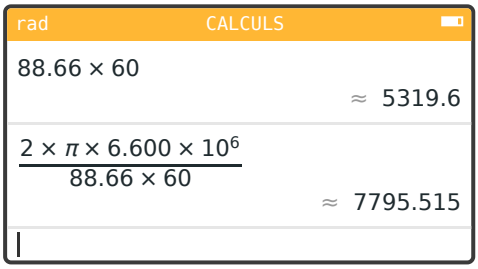
$$V_S = \frac{2\pi \times 6{,}600 \times 10^6}{88{,}66 \times 60}$$

$V_S = 7{,}796 \times 10^3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, soit $7{,}796\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$

PIÈGE
Utiliser l'altitude h_S seule comme rayon, ou laisser la période en minutes : le rayon de l'orbite se compte depuis le centre de la Terre et la période se convertit en secondes.

COMPRENDRE
Quatre chiffres significatifs : T_S en a quatre et la somme $6380 + 220 = 6600$ km est connue au kilomètre près, donc aussi avec quatre chiffres.

À LA CALCULATRICE



1.2 Démontrer, en explicitant la démarche, la relation $\frac{T_S^2}{(R_T + h_S)^3} = \frac{T_{ISS}^2}{(R_T + h_{ISS})^3}$.

Système : un satellite de masse m en orbite circulaire de rayon $r = R_T + h$, dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. Seule force : l'attraction de la Terre, dirigée vers son centre, de valeur $F = \frac{G\,m\,M_T}{r^2}$.

Deuxième loi de Newton : $m\,\vec{a} = \vec{F}$. L'accélération est donc dirigée vers le centre ; pour un mouvement circulaire elle vaut alors $a = \frac{V^2}{r}$ et le mouvement est uniforme :

$$\frac{V^2}{r} = \frac{G\,M_T}{r^2} \quad \text{soit} \quad V = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}}$$

Période : $T = \frac{2\pi r}{V}$, donc $T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{V^2} = \frac{4\pi^2 r^3}{G\,M_T}$, soit

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M_T}$$

Ce rapport ne dépend que de la masse de la Terre : il a la même valeur pour le module Soyouz ($r = R_T + h_S$) et pour l'ISS ($r = R_T + h_{ISS}$).

$\frac{T_S^2}{(R_T + h_S)^3} = \frac{T_{ISS}^2}{(R_T + h_{ISS})^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M_T}$: c'est la troisième loi de Kepler.

COMPRENDRE
La masse m du satellite se simplifie : deux satellites très différents, à la même altitude, ont la même période. Pour une orbite circulaire, le demi-grand axe de la loi de Kepler est le rayon.

MÉTHODE
Si la question dit « démontrer », citer la troisième loi de Kepler ne suffit pas toujours : la chaîne Newton, puis vitesse, puis période, tient en cinq lignes et assure tous les points.

1.3 Déterminer la valeur de la vitesse V_{ISS} de la station spatiale internationale sur son orbite.

Données utiles $R_T + h_S = 6600$ km ; $R_T + h_{ISS} = 6780$ km ; $T_S = 88{,}66$ min ; relation de la question 1.2

La relation de la question 1.2 donne la période de l'ISS :

$$T_{ISS} = T_S \sqrt{\frac{(R_T + h_{ISS})^3}{(R_T + h_S)^3}} = 88{,}66 \times 60 \times \sqrt{\frac{6780^3}{6600^3}} = 5{,}539 \times 10^3 \text{ s}$$

soit environ 92,3 min. Le rapport des rayons est sans unité : ils peuvent rester en kilomètres.

L'orbite de l'ISS est circulaire, de rayon $R_T + h_{ISS} = 6{,}780 \times 10^6$ m :

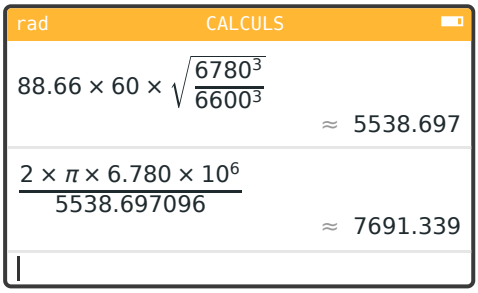
$$V_{ISS} = \frac{2\pi\,(R_T + h_{ISS})}{T_{ISS}} = \frac{2\pi \times 6{,}780 \times 10^6}{5{,}539 \times 10^3}$$

$V_{ISS} = 7{,}691 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, soit $7{,}691 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

PIÈGE
Oublier la racine carrée, ou inverser le rapport des rayons. Contrôle rapide : l'orbite de l'ISS est plus grande, donc T_{ISS} doit être supérieure à T_S.

COMPRENDRE
L'ISS, plus haute, est moins rapide que le module sur son orbite basse et sa période est plus longue : plus l'orbite est éloignée de la Terre, plus le satellite est lent.

À LA CALCULATRICE



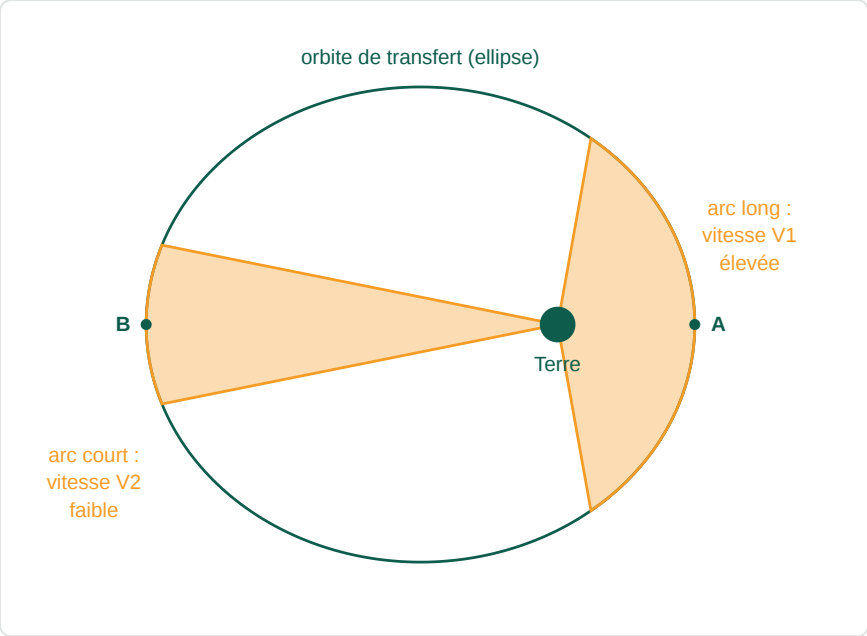
2.1 Énoncer la deuxième loi de Kepler. En quoi permet-elle de montrer que $V_2 < V_1$?

Deuxième loi de Kepler (loi des aires) : le segment qui relie le centre de la Terre au satellite balaie des aires égales pendant des durées égales.

Sur l'orbite de transfert, le point A est le point le plus proche du centre de la Terre et le point B le plus éloigné. Pour une même durée Δt, l'aire balayée autour de B doit être égale à celle balayée autour de A. Comme le segment Terre-satellite est plus long en B, l'arc parcouru pendant Δt y est plus court qu'en A.

Le module parcourt une distance plus petite pendant la même durée au voisinage de B : $V_2 < V_1$.

COMPRENDRE
Sur une orbite circulaire, la même loi impose une vitesse constante, puisque le rayon ne change pas : c'est ce qui a été utilisé à la question 1.1.



2.1 · Loi des aires sur l'orbite de transfert : les deux aires orange sont égales et balayées pendant la même durée

2.2 Montrer que l'énergie potentielle $E_P(B)$ du module Soyouz au point B est plus grande que l'énergie $E_P(A)$ au point A.

Données utiles $E_P = -\dfrac{G\,m\,M_T}{R_T + h}$; en A : $h = h_S = 220$ km ; en B : $h = H_S = 320$ km

B est sur l'orbite haute et A sur l'orbite basse : $H_S > h_S$, donc $R_T + H_S > R_T + h_S$.

Le quotient positif $\dfrac{G\,m\,M_T}{R_T + h}$ est donc plus petit en B qu'en A. Avec le signe « $-$ », l'ordre s'inverse :

$$-\frac{G\,m\,M_T}{R_T + H_S} > -\frac{G\,m\,M_T}{R_T + h_S}$$

$E_P(B) > E_P(A)$: l'énergie potentielle augmente quand le module s'éloigne de la Terre.

PIÈGE
Conclure trop vite que « le dénominateur est plus grand, donc E_P est plus petite ». Les deux énergies sont négatives : la plus grande est celle qui est la plus proche de zéro.

2.3 Justifier que l'énergie mécanique du module Soyouz sur son orbite de transfert, entre les points A et B, ne varie pas.

Entre A et B, la vitesse n'est plus modifiée par les moteurs et, à ces altitudes, les frottements sont négligés. Le module n'est soumis qu'à la force de gravitation exercée par la Terre, qui est une force conservative : c'est d'elle que provient l'énergie potentielle E_P.

Aucune force non conservative ne travaille entre A et B : l'énergie mécanique $E_M = E_C + E_P$ se conserve.

COMPRENDRE
L'énergie mécanique change seulement en A et en B, à l'instant où les moteurs modifient la vitesse : c'est ce qui fait passer le module d'une orbite à l'autre.

2.4 En déduire le signe de la variation d'énergie cinétique entre A et B. Ce résultat est-il en accord avec la deuxième loi de Kepler ?

Conservation de l'énergie mécanique : $E_C(A) + E_P(A) = E_C(B) + E_P(B)$, donc

$$E_C(B) - E_C(A) = -\big(E_P(B) - E_P(A)\big)$$

D'après la question 2.2, $E_P(B) - E_P(A) > 0$: la variation d'énergie cinétique est donc négative.

Comme $E_C = \frac{1}{2} m V^2$ avec m constante, une énergie cinétique plus faible en B signifie une vitesse plus faible en B.

$\Delta E_C < 0$ entre A et B, donc $V_2 < V_1$: c'est en accord avec la deuxième loi de Kepler (question 2.1).

COMPRENDRE
En s'éloignant de la Terre, le module convertit de l'énergie cinétique en énergie potentielle, comme une balle lancée vers le haut qui ralentit en montant.

2.5 Exprimer l'énergie mécanique du module Soyouz au point A en fonction de m, G, M_T, h_S, R_T et V_1.

Au point A, sur l'orbite de transfert, la vitesse vaut V_1 et l'altitude h_S :

$E_M(A) = E_C(A) + E_P(A)$

$$E_M(A) = \frac{1}{2} m V_1^2 - \frac{G m M_T}{R_T + h_S}$$

2.6 Sachant que $V_1 = 7{,}80 \times 10^3$ m · s^{-1}, déterminer la valeur de la vitesse V_2. Ce résultat est-il en accord avec les résultats précédents ?

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ SI ; $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg ; $R_T + h_S = 6{,}60 \times 10^6$ m ; $R_T + H_S = 6{,}70 \times 10^6$ m

Au point B, la vitesse vaut V_2 et l'altitude H_S. L'énergie mécanique se conserve entre A et B (question 2.3) :

$$\frac{1}{2} m V_1^2 - \frac{G m M_T}{R_T + h_S} = \frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{G m M_T}{R_T + H_S}$$

On divise par m, on multiplie par 2 et on isole V_2 :

$$V_2 = \sqrt{V_1^2 + 2 G M_T \left(\frac{1}{R_T + H_S} - \frac{1}{R_T + h_S}\right)}$$

Terme de gravitation :

$$2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24} \times \left(\frac{1}{6{,}70 \times 10^6} - \frac{1}{6{,}60 \times 10^6}\right)$$

Ce terme vaut $-1{,}80 \times 10^6$ m^2 · s^{-2}, d'où :

$$V_2 = \sqrt{(7{,}80 \times 10^3)^2 - 1{,}80 \times 10^6}$$

Remarque : l'énoncé écrit l'unité de G « m^3 · s^2 · kg^{-1} » ; l'unité correcte est m^3 · kg^{-1} · s^{-2}. La valeur numérique est juste.

$V_2 = 7{,}68 \times 10^3$ m · s^{-1} : on a bien $V_2 < V_1$, en accord avec les questions 2.1 et 2.4.

PIÈGE
Les rayons doivent être en mètres, et la parenthèse est négative : si V_2 sort supérieure à V_1, les deux fractions ont été inversées.

COMPRENDRE
La masse m du module, qui n'est pas donnée, disparaît du calcul. Trois chiffres significatifs, comme V_1, G et M_T.

MÉTHODE
Contrôle de l'unité de G : $F = G m M / r^2$ donne G en N · m^2 · kg^{-2}, et 1 N = 1 kg · m · s^{-2}.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24} \times \left(\frac{1}{6.70 \times 10^6} - \frac{1}{6.60 \times 10^6}\right)$

≈ -1804007

$\sqrt{(7.80 \times 10^3)^2 + 2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24} \times \left(\frac{1}{6.70 \times 10^6} - \frac{1}{6.60 \times 10^6}\right)}$

≈ 7683.488

3 Que faut-il faire ensuite pour que le module Soyouz atteigne la station spatiale ISS ?

Données utiles orbite haute : $H_S = 320$ km ; ISS : $h_{ISS} = 400$ km ; $V_{ISS} = 7{,}691 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ (question 1.3)

L'orbite haute (320 km) est encore 80 km sous celle de l'ISS (400 km). Il faut recommencer la manœuvre : depuis l'orbite haute, modifier de nouveau la valeur de la vitesse pour placer le module sur une seconde orbite de transfert elliptique, dont le point le plus éloigné de la Terre est à 400 km d'altitude.

Arrivé à cette altitude, on ajuste une dernière fois la vitesse pour que l'orbite devienne circulaire.

Le module doit finir sur l'orbite de l'ISS avec la même vitesse qu'elle, $V_{ISS} = 7{,}691 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, et y arriver au moment où la station passe à cet endroit.

COMPRENDRE
Deux objets sur la même orbite circulaire ont la même vitesse : ils restent immobiles l'un par rapport à l'autre, ce qui permet l'amarrage.

4.1 Préciser la signification du mot « longitudinale ».

Une onde est longitudinale lorsque la perturbation (ici le déplacement des couches d'air) se fait dans la même direction que celle de la propagation de l'onde.

COMPRENDRE
À l'inverse, une onde est transversale si la perturbation est perpendiculaire à la direction de propagation (vague, corde). Cette distinction n'est plus exigible dans le programme actuel de spécialité.

4.2 Citer une différence entre une onde ultrasonore et une onde sonore.

Elles diffèrent par leur fréquence : un son audible a une fréquence comprise entre 20 Hz et 20 kHz environ, un ultrason a une fréquence supérieure à 20 kHz et n'est pas perçu par l'oreille humaine.

PIÈGE
Répondre que les ultrasons sont « plus rapides » : dans un même milieu, sons et ultrasons se propagent à la même célérité.

4.3 Déterminer la valeur du retard entre l'émission et la réception (figure 3).

Données utiles figure 3 : émission à $t = 0$; une graduation de l'axe des temps vaut 0,2 ms

La salve est émise à $t = 0$: le retard τ est la date à laquelle le signal reçu commence, c'est-à-dire l'instant où il sort du bruit de fond.

Sur la figure 3, le signal débute entre les graduations 0,8 ms et 1,0 ms, un peu après 0,8 ms.

$\tau \approx 0{,}85 \text{ ms} = 8{,}5 \times 10^{-4} \text{ s}$

PIÈGE
Lire la date du maximum d'amplitude (environ 1,25 ms) : le retard se repère au début de la salve reçue, pas à son sommet.

COMPRENDRE
La lecture se fait à 0,05 ms près environ : deux chiffres significatifs suffisent, et toute valeur comprise entre 0,80 et 0,90 ms est acceptable.

4.4 Sachant que la distance d entre l'émetteur et le récepteur vaut 30,0 cm, en déduire la célérité des ondes ultrasonores dans ce milieu.

Données utiles $d = 30{,}0 \text{ cm} = 0{,}300 \text{ m}$; $\tau = 8{,}5 \times 10^{-4}$ s (question 4.3)

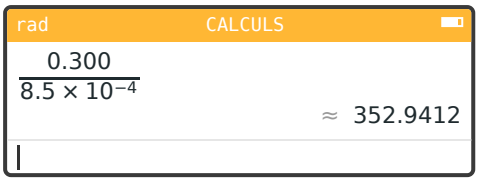
L'onde parcourt la distance d pendant la durée τ :

$$v = \frac{d}{\tau} = \frac{0{,}300}{8{,}5 \times 10^{-4}}$$

$v = 3{,}5 \times 10^{2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

COMPRENDRE
Le résultat est limité à deux chiffres significatifs par la lecture graphique de τ, même si d en a trois.

À LA CALCULATRICE



4.5 Commenter le résultat au regard de la nature du milieu de propagation.

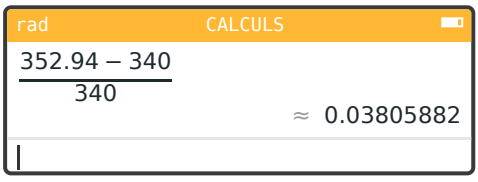
Le milieu de propagation est l'air. La célérité du son et des ultrasons dans l'air vaut environ $340\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ à température ambiante.

La valeur obtenue, $3{,}5 \times 10^{2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, s'en écarte de 4 % environ, ce que l'imprécision de la lecture de τ sur la figure 3 suffit à expliquer.

Le résultat est cohérent avec une propagation dans l'air, un gaz, où la célérité est bien plus faible que dans un liquide ou un solide.

COMPRENDRE
La célérité dépend du milieu : la question 6.2 donne $1{,}54 \times 10^{3}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ dans un organe, plus de quatre fois la valeur dans l'air.

À LA CALCULATRICE



5 Déterminer la valeur de la distance émetteur-écran (figure 4).

Données utiles figure 4 : une graduation vaut 0,1 ms ; $v = 3{,}5 \times 10^{2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (question 4.4)

Sur la figure 4, le signal reçu débute entre 1,1 ms et 1,2 ms : le retard vaut $\tau_2 \approx 1{,}15\ \text{ms} = 1{,}15 \times 10^{-3}\ \text{s}$.

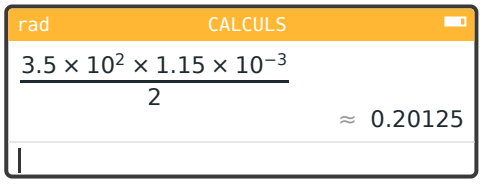
L'émetteur et le récepteur sont côte à côte : l'onde va jusqu'à l'écran, s'y réfléchit et revient. Si D est la distance émetteur-écran, elle parcourt $2D$ pendant τ_2, dans l'air, à la célérité v de la question 4.4 :

$$2D = v\,\tau_2 \quad \text{soit} \quad D = \frac{v\,\tau_2}{2} = \frac{3{,}5 \times 10^{2} \times 1{,}15 \times 10^{-3}}{2}$$

$D \approx 0{,}20\ \text{m}$, soit 20 cm

PIÈGE
Oublier l'aller-retour : sans la division par 2, on trouve 40 cm, le double de la distance réelle.

À LA CALCULATRICE



6.1 À quoi correspondent les deux échos reçus par la sonde aux instants t_1 et t_2 ?

Un écho apparaît à chaque changement de milieu rencontré par les ultrasons.

- Écho reçu à t_1 : réflexion sur la première face de l'organe, la plus proche de la sonde (passage de l'eau à l'organe).
- Écho reçu à t_2 : réflexion sur la seconde face de l'organe (passage de l'organe à l'eau), après traversée de l'organe.

Les deux échos proviennent des deux faces de l'organe ; le second arrive plus tard car l'onde a traversé l'organe deux fois en plus, à l'aller et au retour.

6.2 Sachant que la célérité des ultrasons dans l'organe vaut $1{,}54 \times 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, déterminer la taille e de l'organe étudié. Commenter le résultat.

Données utiles $t_1 = 100\ \mu\text{s}$; $t_2 = 150\ \mu\text{s}$; $v = 1{,}54 \times 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Les deux échos suivent le même trajet dans l'eau. La durée $t_2 - t_1$ correspond donc au seul aller-retour dans l'organe, soit une distance $2e$ parcourue à la célérité v :

$$2e = v\,(t_2 - t_1) \quad \text{soit} \quad e = \frac{v\,(t_2 - t_1)}{2}$$

$$e = \frac{1{,}54 \times 10^3 \times (150 - 100) \times 10^{-6}}{2} = 3{,}85 \times 10^{-2}\ \text{m}$$

Commentaire : quelques centimètres, c'est un ordre de grandeur réaliste pour un organe du corps humain.

$e \approx 3{,}9 \times 10^{-2}\ \text{m}$, soit environ 3,9 cm

PIÈGE

Utiliser t_2 seul, ou oublier de diviser par 2. Les microsecondes se convertissent : $1\ \mu\text{s} = 10^{-6}\ \text{s}$.

MÉTHODE

En échographie, toujours raisonner en aller-retour : la distance entre deux interfaces vaut la célérité multipliée par la moitié de l'écart entre les deux échos.

À LA CALCULATRICE

