Positionnement par satellite

Bac S 2019 Nouvelle-Calédonie (ancien programme) · Exercice 2 **11 points** **Durée conseillée 1 h 50**

1.1 Exprimer la force $\overrightarrow{F}_{T/S}$ exercée par la Terre sur le satellite en fonction notamment du vecteur unitaire $\vec{n}$ dirigé du satellite vers le centre de la Terre.

La distance entre le centre de la Terre et le satellite est $R+h$. La force est attractive, dirigée vers le centre de la Terre, donc selon $+\vec{n}$:

$$\overrightarrow{F}_{T/S} = \frac{G\,M_T\,m_S}{(R+h)^2}\,\vec{n}$$

PIÈGE
Écrire h^2 ou R^2 au dénominateur : la distance se mesure depuis le centre de la Terre, soit $R+h$. Pas de signe « $-$ » : $\vec{n}$ pointe déjà vers la Terre.

1.2 Le mouvement du satellite étant circulaire uniforme, montrer avec la deuxième loi de Newton que $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_T}{R+h}}$.

Système {satellite}, de masse m_S constante ; référentiel géocentrique supposé galiléen ; seule force : $\overrightarrow{F}_{T/S}$.

Deuxième loi de Newton : $\overrightarrow{F}_{T/S} = m_S\,\vec{a}$, donc

$$\vec{a} = \frac{G\,M_T}{(R+h)^2}\,\vec{n}$$

Le mouvement est circulaire uniforme, de rayon $R+h$: l'accélération est centripète, $\vec{a} = \dfrac{v^2}{R+h}\,\vec{n}$.

En égalant les deux expressions : $\dfrac{v^2}{R+h} = \dfrac{G\,M_T}{(R+h)^2}$, soit $v^2 = \dfrac{G\,M_T}{R+h}$.

$v = \sqrt{\dfrac{G \times M_T}{R+h}}$: c'est la relation attendue.

COMPRENDRE
La masse m_S se simplifie : la vitesse sur une orbite donnée ne dépend pas de la masse du satellite, seulement de l'astre attracteur et du rayon de l'orbite.

MÉTHODE
Satellite en orbite circulaire : 1) système, référentiel, force ; 2) deuxième loi de Newton, qui donne $\vec{a}$; 3) accélération d'un mouvement circulaire uniforme, v^2/r vers le centre ; 4) égalité des deux expressions.

1.3 En déduire la valeur de cette vitesse en $\mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$; $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg ; $R = 6\,371$ km ; $h = 850$ km

Rayon de l'orbite : $R+h = 6\,371 + 850 = 7\,221\ \mathrm{km} = 7{,}221 \times 10^6$ m.

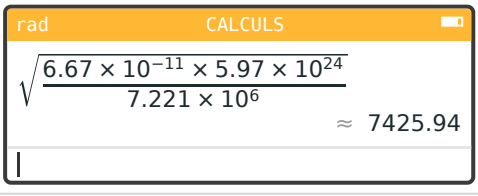
$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24}}{7{,}221 \times 10^6}} = 7{,}43 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$v = 7{,}43\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$

PIÈGE
Laisser $R+h$ en kilomètres dans la formule : G est en unités SI, la distance doit être en mètres. La vitesse sort en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, à convertir ensuite.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme G, M_T et h, les données les moins précises.

À LA CALCULATRICE



1.4 Calculer la valeur de la période de révolution T du satellite autour de la Terre.

Données utiles $R+h = 7{,}221 \times 10^6$ m ; $v = 7{,}43 \times 10^3$ m · s^{-1} (1.3)

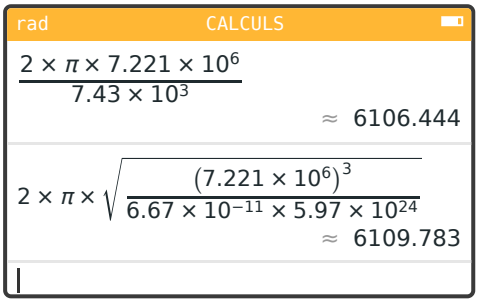
Pendant une période, le satellite parcourt à vitesse constante la circonférence de l'orbite : $v = \dfrac{2\pi\,(R+h)}{T}$, donc

$$T = \frac{2\pi\,(R+h)}{v} = \frac{2\pi \times 7{,}221 \times 10^6}{7{,}43 \times 10^3} = 6{,}11 \times 10^3 \text{ s}$$

$T = 6{,}11 \times 10^3$ s, soit environ 1 h 42 min.

COMPRENDRE
La seconde ligne de calcul vérifie le résultat avec $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(R+h)^3}{G\,M_T}}$ (troisième loi de Kepler), sans passer par la valeur arrondie de v : même résultat à trois chiffres.

À LA CALCULATRICE



2.1 Déterminer le domaine du spectre électromagnétique auquel appartient l'onde émise par une balise.

Données utiles $f_E = 401{,}6500$ MHz ; $c = 3{,}00 \times 10^8$ m · s^{-1} ; figure 1

Longueur d'onde dans le vide : $\lambda = \dfrac{c}{f_E}$

$$\lambda = \frac{3{,}00 \times 10^8}{401{,}6500 \times 10^6} = 0{,}747 \text{ m} = 7{,}47 \times 10^8 \text{ nm}$$

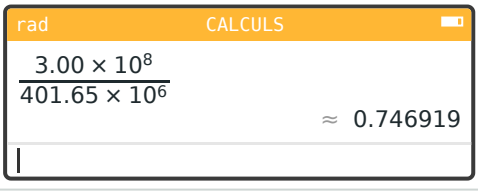
Sur la figure 1 : 10^6 nm $< \lambda < 10^9$ nm.

L'onde émise par la balise appartient au domaine des **micro-ondes**.

PIÈGE
La figure 1 est graduée en nanomètres : 1 m = 10^9 nm. Oublier la conversion, ou garder la fréquence en MHz, place l'onde dans un mauvais domaine.

COMPRENDRE
Avec le découpage de la figure 1, la limite entre micro-ondes et ondes radio est à 10^9 nm, soit 1 m : avec 0,747 m, l'onde est juste du côté des micro-ondes.

À LA CALCULATRICE



2.2 Indiquer si, à 12 h 56 min 12 s, le satellite s'approche ou s'éloigne de la balise. Justifier.

Données utiles figure 2 : à t_0, $f_R \approx 401{,}6566$ MHz ; $f_E = 401{,}6500$ MHz

À t_0 = 12 h 56 min 12 s (durée écoulée nulle), la figure 2 donne $f_R \approx 401{,}6566$ MHz $> f_E$.

D'après $f_R = f_E \times \left(1 + \dfrac{v\cos\theta}{c}\right)$, $f_R > f_E$ impose $\cos\theta > 0$, donc $\theta < 90^\circ$: la vitesse du satellite est orientée du côté de la balise (position de droite sur la figure 3).

À 12 h 56 min 12 s, le satellite **s'approche** de la balise : la fréquence reçue est supérieure à la fréquence émise.

COMPRENDRE
Effet Doppler : quand émetteur et récepteur se rapprochent, la fréquence reçue est plus grande que la fréquence émise ; quand ils s'éloignent, elle est plus petite.

2.3 Déterminer l'heure à laquelle le satellite s'est approché au plus près de la balise. Justifier.

Données utiles figure 2 ; t_0 = 12 h 56 min 12 s

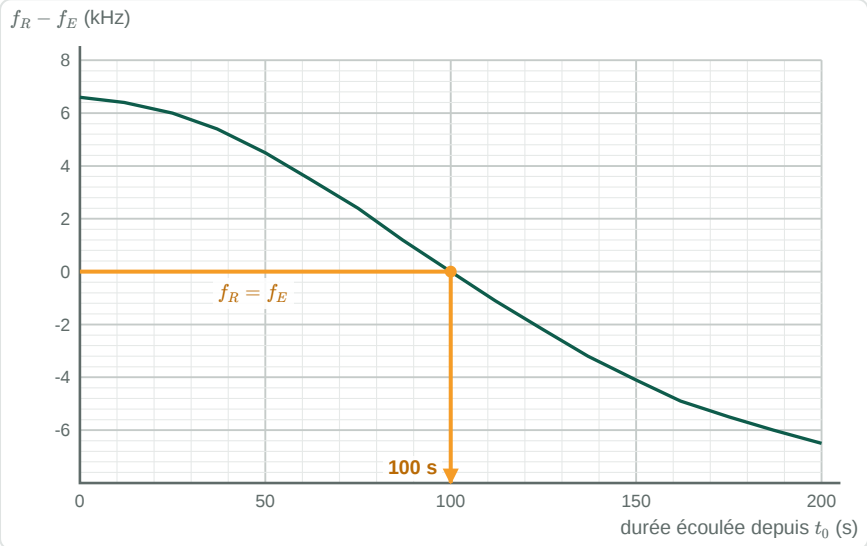
Le satellite est au plus près de la balise lorsqu'il passe à sa verticale (position centrale de la figure 3). La droite de visée est alors perpendiculaire à la vitesse : $\theta = 90^\circ$, $\cos\theta = 0$, donc $f_R = f_E$.

Sur la figure 2, $f_R = f_E = 401{,}6500$ MHz pour une durée écoulée de 100 s, soit 1 min 40 s après t_0.

12 h 56 min 12 s + 1 min 40 s = 12 h 57 min 52 s.

Le satellite est au plus près de la balise à **12 h 57 min 52 s**.

PIÈGE
Chercher un minimum de la courbe : la distance la plus courte ne correspond pas à la fréquence la plus basse, mais à l'instant où la fréquence reçue est égale à la fréquence émise.



2.3 · Figure 2 du sujet (écart à 401,6500 MHz) : lecture de la date où $f_R = f_E$

2.4 Expliquer comment cette méthode permet de déterminer la position des balises à la surface du globe terrestre.

Le satellite mesure la fréquence f_R au cours du temps. L'instant où $f_R = f_E$ est celui où il passe à la verticale de la balise (au plus près d'elle).

Or l'orbite du satellite est connue : on sait à chaque instant quel point de la surface terrestre il survole.

La balise se trouve au point de la surface terrestre situé à la verticale du satellite à la date où $f_R = f_E$; la position du satellite à cette date donne donc celle de la balise.

COMPRENDRE
Plus généralement, connaissant v et c, chaque mesure de f_R donne $\cos\theta$, donc la direction de la balise vue du satellite. Plusieurs mesures au cours du passage localisent la balise, même si elle n'est pas exactement sous la trajectoire.

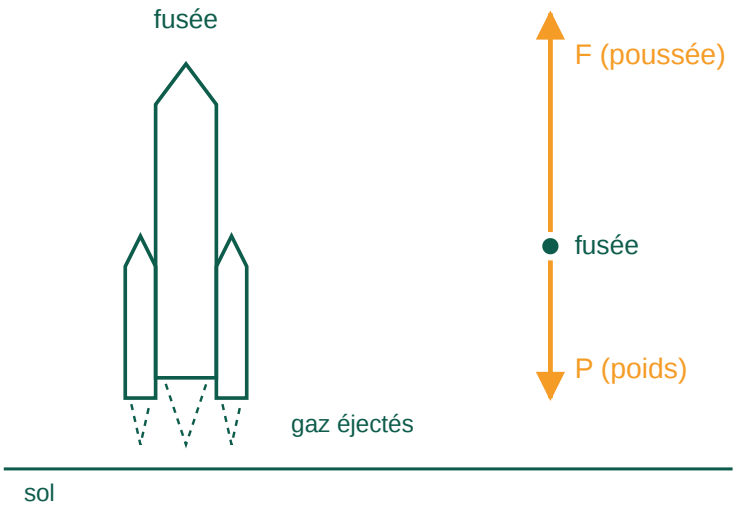
3.1 Dresser un bilan qualitatif des forces qui s'exercent sur la fusée et ses propulseurs dans les premiers instants juste après le décollage. Les représenter sur un schéma sans souci d'échelle.

Système {fusée et ses propulseurs} ; référentiel terrestre supposé galiléen. Les actions de l'air sont négligées.

- Le poids $\vec{P}$: vertical, vers le bas, exercé par la Terre.
- La force de poussée $\vec{F}$: verticale, vers le haut, exercée par les gaz éjectés (somme des poussées du premier étage et des propulseurs d'appoint allumés).

Deux forces : le poids $\vec{P}$ (vers le bas) et la poussée $\vec{F}$ (vers le haut), avec $F > P$ puisque la fusée décolle.

PIÈGE
Ajouter une « force des gaz vers le bas » : cette force s'exerce sur les gaz, pas sur la fusée. La poussée est la force que les gaz éjectés exercent sur la fusée, vers le haut.



3.1 · Forces sur la fusée juste après le décollage (sans souci d'échelle) ; à droite, la fusée est modélisée par un point

3.2.1 Montrer que la fusée ne pourrait pas décoller en utilisant uniquement le propulseur du premier étage.

Données utiles $m = 228 \times 10^3$ kg ; $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $F_1 = 890 \times 10^3$ N

Pour décoller, la fusée doit avoir une accélération vers le haut : la poussée doit être supérieure au poids.

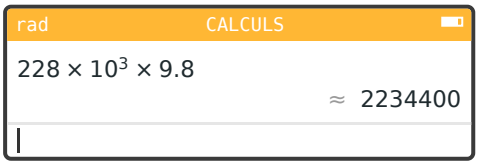
Poids de la fusée : $P = m\,g = 228 \times 10^3 \times 9{,}8 = 2{,}2 \times 10^6$ N.

Poussée du premier étage seul : $F_1 = 890 \times 10^3\ \text{N} = 0{,}890 \times 10^6$ N.

$F_1 < P$ ($0{,}89 \times 10^6\ \text{N} < 2{,}2 \times 10^6\ \text{N}$) : la somme des forces serait dirigée vers le bas, la fusée ne décollerait pas.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs pour P, comme $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. La comparaison est sans ambiguïté : le poids vaut environ 2,5 fois la poussée du premier étage.

À LA CALCULATRICE



3.2.2 Déterminer le nombre minimum de propulseurs d'appoint à utiliser en plus du propulseur du premier étage pour permettre à la fusée de décoller.

Données utiles $P = 2{,}234 \times 10^6$ N (3.2.1, valeur non arrondie) ; $F_1 = 890 \times 10^3$ N ; $F_p = 493 \times 10^3$ N

Avec n propulseurs d'appoint, la poussée totale est $F_1 + n\,F_p$. La fusée décolle si $F_1 + n\,F_p > P$, soit

$$n > \frac{P - F_1}{F_p} = \frac{2{,}234 \times 10^6 - 890 \times 10^3}{493 \times 10^3} = 2{,}7$$

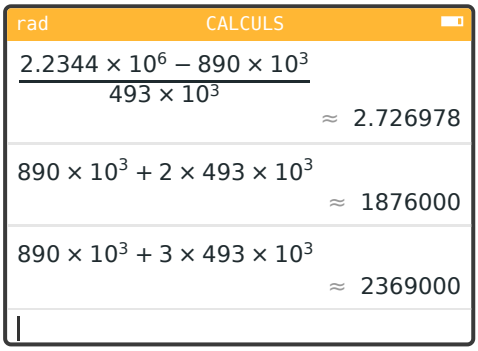
n est un nombre entier : $n \geqslant 3$.

Vérification : avec 2 propulseurs, $890 \times 10^3 + 2 \times 493 \times 10^3 = 1{,}88 \times 10^6$ N $< P$; avec 3, $890 \times 10^3 + 3 \times 493 \times 10^3 = 2{,}37 \times 10^6$ N $> P$.

Il faut au minimum **3 propulseurs d'appoint** en plus du premier étage.

PIÈGE
Arrondir 2,7 au plus proche donne bien 3 ici, mais le raisonnement est un arrondi à l'entier supérieur : avec 2,2 il faudrait aussi 3 propulseurs.

À LA CALCULATRICE



3.3.1 Le premier étage et six propulseurs d'appoint sont activés. À l'aide de la deuxième loi de Newton, déterminer la valeur de l'accélération de la fusée. Commenter.

Données utiles $m = 228 \times 10^3$ kg ; $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $F_1 = 890 \times 10^3$ N ; $F_p = 493 \times 10^3$ N

Système {fusée}, de masse m supposée constante ; référentiel terrestre supposé galiléen ; forces : poids $\vec{P}$ et poussée totale $\vec{F}$.

Poussée totale : $F = F_1 + 6\,F_p = 890 \times 10^3 + 6 \times 493 \times 10^3 = 3{,}848 \times 10^6$ N.

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{F} = m\,\vec{a}$. En projection sur un axe vertical orienté vers le haut : $F - m\,g = m\,a$, donc

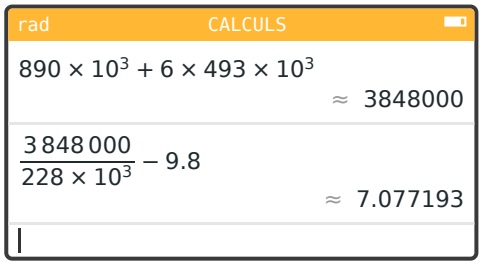
$$a = \frac{F}{m} - g = \frac{3{,}848 \times 10^6}{228 \times 10^3} - 9{,}8 = 7{,}1\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Commentaire : $a > 0$, l'accélération est dirigée vers le haut, la fusée décolle bien. Sa valeur est du même ordre de grandeur que g (environ $0{,}7\,g$) : en une seconde, la vitesse n'atteint que $7{,}1\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, le décollage est progressif.

$a = 7{,}1\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, verticale et dirigée vers le haut.

PIÈGE
Oublier le poids et écrire $a = F/m$ (on trouverait $16{,}9\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$). Ne compter que six propulseurs d'appoint, pas neuf.

À LA CALCULATRICE



3.3.2 Estimer la masse de carburant consommé pendant la première seconde de décollage.

Données utiles premier étage : 100×10^3 kg en 265 s ; chaque propulseur d'appoint : $11{,}7 \times 10^3$ kg en 64 s ; 6 propulseurs d'appoint allumés

On suppose que chaque moteur consomme son carburant à débit constant pendant toute la durée de sa combustion.

Premier étage, en 1 s : $\dfrac{100 \times 10^3}{265} = 377$ kg.

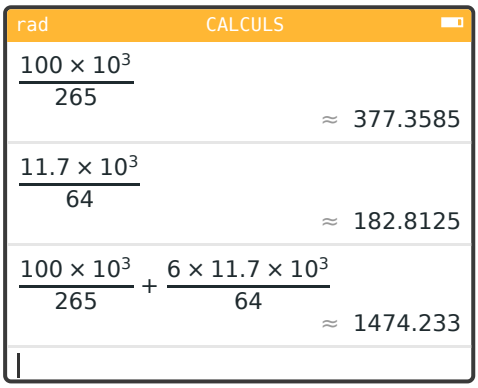
Un propulseur d'appoint, en 1 s : $\dfrac{11{,}7 \times 10^3}{64} = 183$ kg.

Total : $m_c = 377 + 6 \times 183 = 1{,}5 \times 10^3$ kg.

$m_c \approx 1{,}5 \times 10^3$ kg de carburant consommé pendant la première seconde.

COMPRENDRE
C'est une estimation : le débit constant est une hypothèse, cohérente avec des poussées constantes. Deux chiffres significatifs suffisent, comme la durée de 64 s.

À LA CALCULATRICE



3.3.3 L'hypothèse concernant la masse de la fusée est-elle valable ? Justifier.

Données utiles $m_c \approx 1{,}5 \times 10^3$ kg (3.3.2) ; $m = 228 \times 10^3$ kg

L'hypothèse est que la masse de la fusée reste constante pendant la première seconde. On compare la masse de carburant consommé à la masse totale :

$$\frac{m_c}{m} = \frac{1{,}5 \times 10^3}{228 \times 10^3} = 6{,}6 \times 10^{-3}$$

soit moins de 1 % de la masse de la fusée.

L'hypothèse est valable : la masse éjectée pendant la première seconde (environ 0,7 % de la masse totale) est négligeable devant la masse de la fusée.

MÉTHODE
Pour valider une hypothèse « négligeable », calculer un rapport sans unité entre les deux grandeurs et le comparer à quelques pour cent. Une simple phrase sans chiffre ne rapporte pas les points.

À LA CALCULATRICE

