Le canon de Paris

Bac S 2019 Amérique du Sud (ancien programme) · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 50 min**

1.1 Comment varie la quantité de mouvement du système {tube du canon + obus} pendant la phase de tir ?

Dans le référentiel terrestre galiléen, la deuxième loi de Newton s'écrit $\sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$.

Le système est pseudo-isolé : $\sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$.

La quantité de mouvement $\vec{p}$ du système ne varie pas : elle se conserve pendant le tir.

COMPRENDRE

La quantité de mouvement $\vec{p} = m\,\vec{v}$ et sa conservation ne figurent plus au programme actuel de spécialité. La partie 1 relève de l'ancien programme ; les parties 2 et 3 restent d'actualité.

1.2 En déduire la vitesse de recul du tube lors de l'expulsion de l'obus.

Données utiles masse du tube $m_T = 100\ \text{t} = 100 \times 10^3$ kg ; masse de l'obus $m_o = 105$ kg ; vitesse d'éjection $v_0 = 1600\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Avant le tir, le tube et l'obus sont immobiles : $\vec{p}_{\text{avant}} = \vec{0}$.

Après le tir : $\vec{p}_{\text{après}} = m_T\,\vec{v}_T + m_o\,\vec{v}_0$.

Conservation (1.1) : $m_T\,\vec{v}_T + m_o\,\vec{v}_0 = \vec{0}$, soit $\vec{v}_T = -\dfrac{m_o}{m_T}\,\vec{v}_0$.

Le tube part en sens opposé à l'obus, avec la vitesse de valeur :

$$v_T = \frac{m_o\,v_0}{m_T} = \frac{105 \times 1600}{100 \times 10^3} = 1{,}68\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$v_T \approx 1{,}7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, en sens opposé à celui de l'obus.

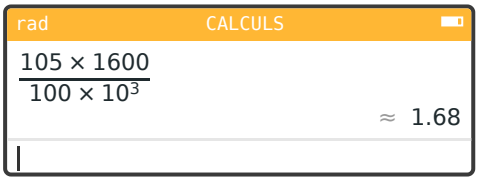
PIÈGE

Laisser la masse du tube en tonnes, ou prendre les 750 tonnes du canon monté : la question porte sur le tube seul, soit 100×10^3 kg.

COMPRENDRE

Le texte dit « plus de 100 tonnes » : la masse est connue grossièrement, deux chiffres significatifs suffisent au résultat.

À LA CALCULATRICE



1.3 Quelle serait cette vitesse si le tube était 10 fois plus léger (10 tonnes) ? Justifier la masse importante du tube du canon de Paris.

Données utiles $m'_T = 10 \times 10^3$ kg ; $m_o = 105$ kg ; $v_0 = 1600\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

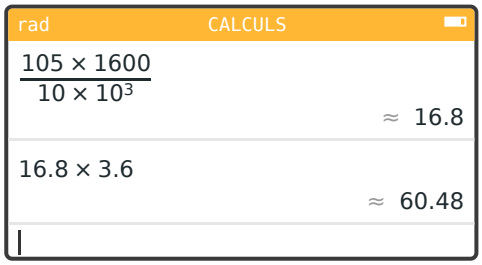
$$v'_T = \frac{m_o\,v_0}{m'_T} = \frac{105 \times 1600}{10 \times 10^3} = 16{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La vitesse de recul est inversement proportionnelle à la masse du tube : un tube 10 fois plus léger recule 10 fois plus vite, soit environ $60\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Une masse importante limite donc le recul, qui risquerait sinon d'endommager le canon et son support.

$v'_T \approx 17\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$: un tube lourd rend le recul faible.

À LA CALCULATRICE



2.1 En utilisant une loi de Newton, déterminer les coordonnées $a_x(t)$ et $a_y(t)$ du vecteur accélération de l'obus.

Système {obus}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$ seul (frottements et poussée d'Archimède négligés).

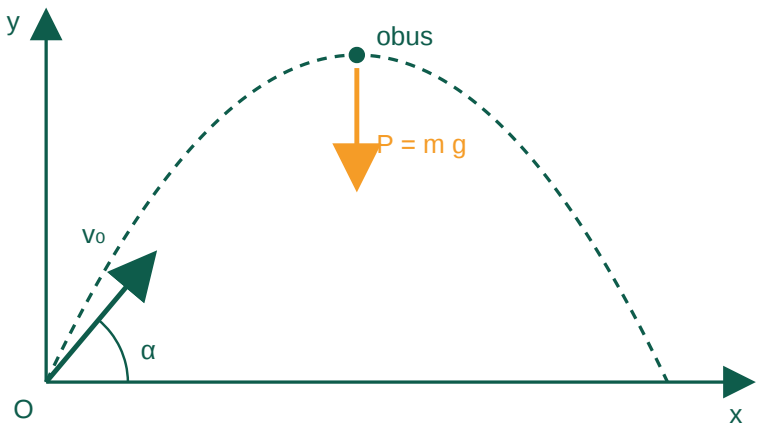
Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical, vers le bas, donc opposé à $\vec{j}$:

$a_x(t) = 0$ et $a_y(t) = -g$

PIÈGE
Écrire $a_y = +g$. L'axe (Oy) est orienté vers le haut et $\vec{g}$ vers le bas : la coordonnée est négative.

MÉTHODE
Toujours les quatre mêmes étapes : système, référentiel galiléen, bilan des forces, deuxième loi de Newton. Projeter ensuite sur les axes du repère imposé par le sujet.



2.1 · Repère du sujet : vitesse initiale et poids de l'obus

2.2 En déduire les coordonnées $v_x(t)$ et $v_y(t)$ du vecteur vitesse, puis montrer que $x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t$ et $y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t$.

$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$: on cherche les primitives de $a_x = 0$ et $a_y = -g$.

$v_x(t) = C_1$ et $v_y(t) = -g\,t + C_2$.

À $t = 0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ de coordonnées $v_0\cos(\alpha)$ et $v_0\sin(\alpha)$, donc $C_1 = v_0\cos(\alpha)$ et $C_2 = v_0\sin(\alpha)$:

$$v_x(t) = v_0\cos(\alpha) \qquad v_y(t) = -g\,t + v_0\sin(\alpha)$$

$\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$: on cherche les primitives de v_x et v_y.

$x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t + C_3$ et $y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t + C_4$.

À $t = 0$, l'obus est en O : $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$, donc $C_3 = 0$ et $C_4 = 0$.

$x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t$ et $y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t$: ce sont les équations horaires annoncées.

PIÈGE
Oublier les constantes d'intégration, ou ne pas les justifier. Chaque constante se détermine par une condition initiale écrite explicitement : vitesse $\vec{v}_0$ puis position O à $t = 0$.

2.3 En déduire l'équation de la trajectoire $y = f(x)$.

On élimine le temps : $x = v_0 \cos(\alpha)\, t$ donne $t = \dfrac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$.

On remplace dans $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \right)^2 + v_0 \sin(\alpha) \times \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$$

Avec $\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$:

$$\boxed{y = -\frac{g}{2\, v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \tan(\alpha)\, x}$$

COMPRENDRE
L'équation est de la forme $y = a\,x^2 + b\,x$ avec $a < 0$: la trajectoire est une portion de parabole tournée vers le bas, passant par l'origine.

3.1 À l'aide des équations horaires, déterminer la durée du vol et la portée théorique, l'obus retombant à l'altitude de son point de départ.

Données utiles $v_0 = 1600 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $\alpha = 50^\circ$; $g = 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

L'obus touche le sol quand $y(t) = 0$:

$-\dfrac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin(\alpha)\, t = 0$, soit $t \left(-\dfrac{1}{2} g\, t + v_0 \sin(\alpha) \right) = 0$.

La solution $t = 0$ correspond au départ. La durée du vol est l'autre solution :

$$t_{\text{vol}} = \frac{2\, v_0 \sin(\alpha)}{g} = \frac{2 \times 1600 \times \sin(50^\circ)}{9{,}8} = 2{,}5 \times 10^2 \text{ s}$$

La portée est l'abscisse de l'obus à cette date :

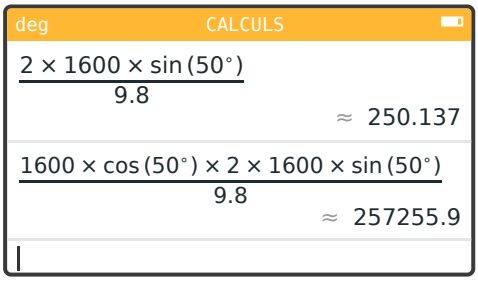
$$x(t_{\text{vol}}) = v_0 \cos(\alpha)\, t_{\text{vol}} = 1600 \times \cos(50^\circ) \times 250{,}1 = 2{,}6 \times 10^5 \text{ m}$$

$\boxed{t_{\text{vol}} \approx 2{,}5 \times 10^2 \text{ s et portée} \approx 2{,}6 \times 10^2 \text{ km}}$

PIÈGE
Calculatrice réglée en radians : $\sin(50)$ est alors négatif et la durée aussi. Vérifier le mode degrés avant tout calcul.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme g et α. On garde la valeur non arrondie de t_{vol} pour calculer la portée.

À LA CALCULATRICE



3.2 Déterminer l'altitude théorique maximale atteinte par l'obus, sachant que $v_y = -9{,}8 \times t + 1226$.

Données utiles $g = 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $v_0 \sin(\alpha) = 1226 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (expression de v_y)

Au sommet de la trajectoire, la vitesse est horizontale : $v_y(t_S) = 0$.

$-9{,}8 \times t_S + 1226 = 0$, soit $t_S = \dfrac{1226}{9{,}8} = 125{,}1$ s.

L'altitude maximale est $y(t_S)$, avec $v_0 \sin(\alpha) = 1226 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$:

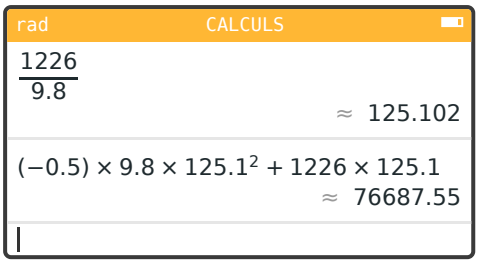
$$y_{\max} = -\frac{1}{2} \times 9{,}8 \times 125{,}1^2 + 1226 \times 125{,}1 = 7{,}7 \times 10^4 \text{ m}$$

$\boxed{y_{\max} \approx 7{,}7 \times 10^4 \text{ m, soit environ 77 km}}$

PIÈGE
Dire que la vitesse est nulle au sommet. Seule v_y s'annule : l'obus garde sa vitesse horizontale $v_x = v_0 \cos(\alpha)$.

MÉTHODE
Sommet d'une trajectoire parabolique : $v_y = 0$ donne la date, puis y à cette date donne l'altitude. Contrôle : t_S vaut la moitié de la durée du vol (125 s pour 250 s).

À LA CALCULATRICE



3.3 Expliquer l'écart entre les résultats théoriques des deux questions précédentes et les données du document.

Données utiles document : 176 s, 126 km, 42 km ; modèle : 250 s et 260 km (3.1), 77 km (3.2)

Les valeurs théoriques sont nettement supérieures aux valeurs mesurées : durée de vol 250 s contre 176 s, portée 260 km contre 126 km, altitude maximale 77 km contre 42 km.

Le modèle néglige les frottements de l'air. Or, à $1600\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, ils sont très importants, surtout dans les couches basses et denses de l'atmosphère. Ils freinent l'obus tout au long du vol.

L'écart vient des frottements de l'air, négligés dans le modèle : l'obus réel monte moins haut, vole moins longtemps et retombe plus près.

COMPRENDRE

Le modèle de la chute libre donne ici environ le double des valeurs réelles : l'hypothèse « frottements négligeables » n'est pas valable pour un projectile aussi rapide, même si l'air raréfié en altitude réduit leur effet.