Le kiiking, sport extrême en Estonie

Bac S 2018 Polynésie (ancien programme) · Exercice 2 **7 points** **Durée conseillée 1 h 10**

1.1 Nommer les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ qui s'exercent sur le système. Attribuer une légende aux cas n°1 et n°2 (repos, passage par la position d'équilibre) en justifiant par une loi de Newton à énoncer.

$\vec{F}_2$, verticale et dirigée vers le bas, est le **poids** du système. $\vec{F}_1$, dirigée le long de la tige, est l'**action de la tige** (tension).

Première loi de Newton (principe d'inertie) : dans un référentiel galiléen, si les forces qui s'exercent sur un système se compensent, alors il est immobile ou en mouvement rectiligne uniforme, et réciproquement.

Au repos, le système est immobile : $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$. Les deux flèches ont la même longueur, c'est le cas n°2.

Au passage par la position d'équilibre, le système décrit un arc de cercle : son mouvement n'est pas rectiligne uniforme, donc les forces ne se compensent pas. Les flèches sont de longueurs différentes, c'est le cas n°1.

Cas n°1 : passage par la position d'équilibre ; cas n°2 : position au repos.

PIÈGE
« Position d'équilibre » ne veut pas dire « forces qui se compensent » : le système y passe à sa vitesse maximale, sur une trajectoire courbe.

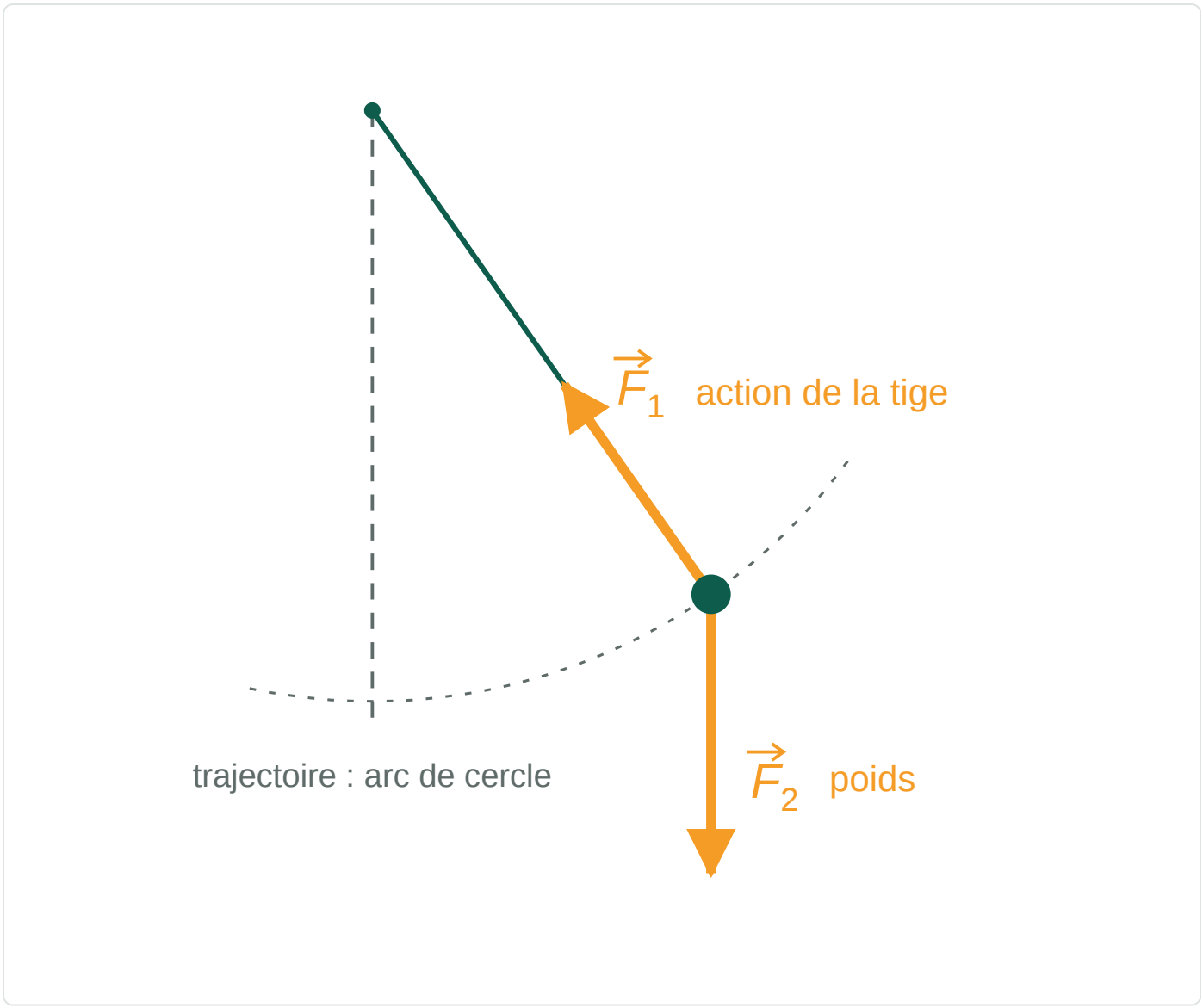
COMPRENDRE
Dans le cas n°1, $F_1 > F_2$: la somme des forces est dirigée vers le haut, vers le centre de la trajectoire circulaire, comme l'accélération (deuxième loi de Newton).

1.2 Recopier le schéma du système dans une position quelconque et représenter les deux forces qui s'exercent sur lui. Que peut-on dire du vecteur vitesse lors du mouvement ?

Le poids $\vec{F}_2$ est vertical, vers le bas. L'action de la tige $\vec{F}_1$ est dirigée selon la tige, vers le point d'attache.

La trajectoire est un arc de cercle : le vecteur vitesse lui est tangent, donc perpendiculaire à la tige, et sa direction change sans cesse. Ces deux forces ne se compensent pas, donc d'après la deuxième loi de Newton $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \neq \vec{0}$.

Le vecteur vitesse varie en direction et en valeur : nul aux positions extrêmes, de valeur maximale au passage en O.



1.2 · Schéma recopié : les deux forces dans une position quelconque

1.3.1 Identifier, en justifiant, la coordonnée x ou y correspondant à la grandeur a, puis déterminer la période T_1 de ses variations. Déterminer la période T_2 des variations de l'autre coordonnée.

O est le point le plus bas de la trajectoire : y n'est jamais négatif, alors que x prend des valeurs positives et négatives de part et d'autre de la verticale. La grandeur a change de signe : c'est x. La grandeur b est donc y.

Courbe 1 : 4 périodes entre $t = 0$ et $t = 21{,}5$ s, donc $T_1 = \dfrac{21{,}5}{4} = 5{,}4$ s.

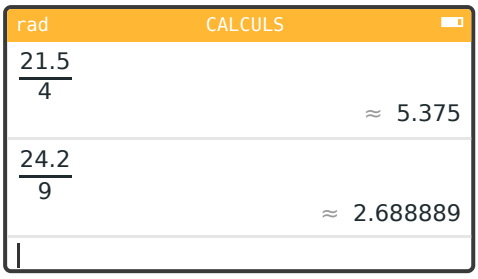
Courbe 2 : 9 périodes entre $t = 0$ et $t = 24{,}2$ s, donc $T_2 = \dfrac{24{,}2}{9} = 2{,}7$ s.

$a = x$; $T_1 = 5{,}4$ s ; $T_2 = 2{,}7$ s

MÉTHODE

Mesurer la durée du plus grand nombre possible de périodes, entre deux maximums bien repérés, puis diviser : l'erreur de lecture est répartie sur toutes les périodes.

À LA CALCULATRICE



1.3.2 Calculer la période propre du pendule simple modélisant le système. Laquelle des périodes T_1 ou T_2 correspond à la période d'oscillations de la structure ?

Données utiles $L = 7{,}15$ m ; $g = 9{,}80$ m · s^{-2} ; $T_1 = 5{,}4$ s et $T_2 = 2{,}7$ s (1.3.1)

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{7{,}15}{9{,}80}} = 5{,}37 \text{ s}$$

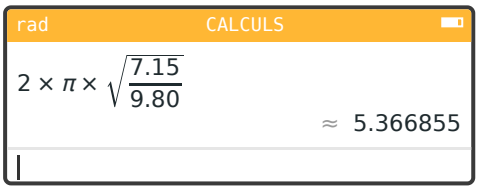
Cette valeur est très proche de T_1 et vaut le double de T_2.

$T_0 = 5{,}37$ s : la période d'oscillations de la structure est T_1.

COMPRENDRE

Trois chiffres significatifs, comme L et g. La masse n'intervient pas dans T_0. La période du pendule simple n'est plus au programme actuel de spécialité : sa formule serait donnée, comme ici.

À LA CALCULATRICE



1.3.3 Justifier qualitativement la relation simple existant entre T_1 et T_2.

Pendant une oscillation complète (un aller-retour), x reprend une seule fois sa valeur de départ. Dans le même temps, le système descend en O, remonte de l'autre côté, redescend en O puis remonte au point de départ : y passe deux fois par son maximum, une fois de chaque côté de la verticale.

La coordonnée y effectue donc deux cycles pendant que x en effectue un seul.

$T_1 = 2\,T_2$

2.1 Les enregistrements débutent au moment du lâcher. Identifier, sur l'annexe, les courbes correspondant à chacune des formes d'énergie et justifier.

Le système est lâché sans vitesse initiale : à $t = 0$, $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 0$. La courbe en trait plein, qui part de 0, est celle de l'énergie cinétique.

À cet instant, l'altitude y est maximale, donc $E_{pp} = mgy$ aussi : la courbe en pointillés, qui part de sa valeur maximale, est celle de l'énergie potentielle de pesanteur.

Trait plein : énergie cinétique ; pointillés : énergie potentielle de pesanteur (annexe complétée à la question 2.2).

2.2 Rappeler l'expression de l'énergie mécanique E_m du système et tracer, sur l'annexe, la courbe $E_m = f(t)$. Justifier l'allure de la courbe obtenue.

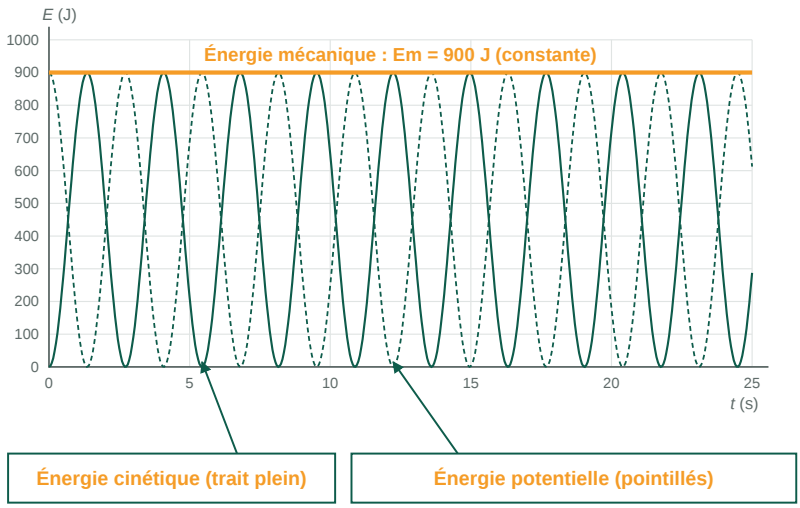
$E_m = E_c + E_{pp}$

Les frottements sont négligés et l'action de la tige, perpendiculaire au déplacement à chaque instant, ne travaille pas : seul le poids, force conservative, travaille. L'énergie mécanique se conserve.

À $t = 0$: $E_m = E_c + E_{pp} = 0 + 900 = 900$ J.

$E_m = E_c + E_{pp} = 900$ J à chaque instant : la courbe est une droite horizontale d'ordonnée 900 J.

COMPRENDRE
Quand une courbe est à 900 J, l'autre est à 0 : l'énergie passe sans perte d'une forme à l'autre. Les deux courbes se croisent à 450 J.



2.2 · Annexe complétée (questions 2.1 et 2.2)

2.3 Montrer que l'énergie potentielle de pesanteur du système s'écrit $E_{pp} = mgL(1 - \cos\theta)$, en la prenant nulle à la position d'équilibre stable.

L'axe (Oy) est vertical vers le haut et $E_{pp} = 0$ en O ($y = 0$), donc $E_{pp} = mgy$.

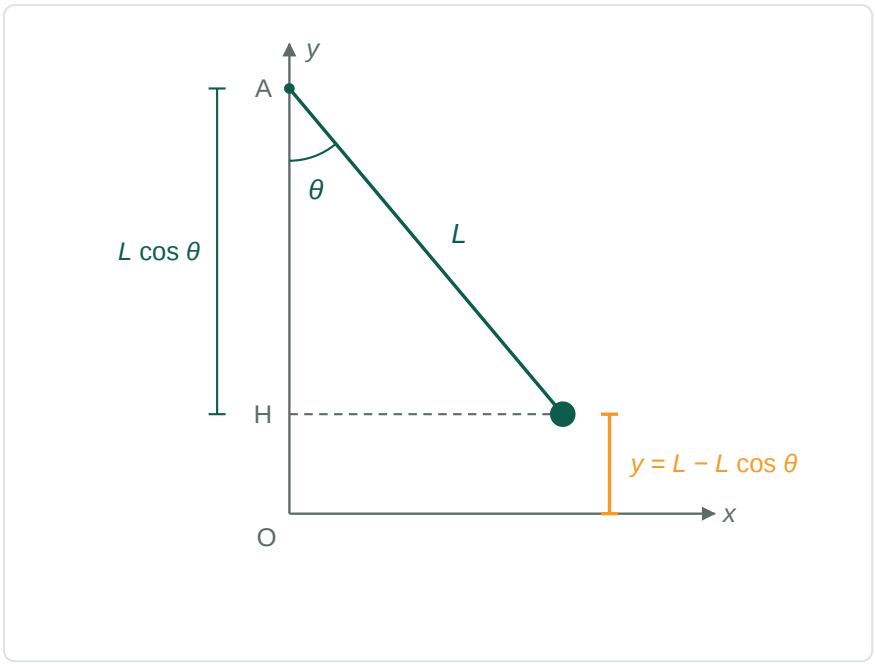
Soit A le point d'attache de la tige et H le projeté du système sur l'axe vertical. Dans le triangle rectangle formé par A, H et le système :

$\cos\theta = \dfrac{AH}{L}$, donc $AH = L\cos\theta$.

Comme $AO = L$: $y = OH = AO - AH = L - L\cos\theta = L(1 - \cos\theta)$

$E_{pp} = mgy = mgL(1 - \cos\theta)$

MÉTHODE
Vérifier la formule sur des cas simples : $\theta = 0$ donne $E_{pp} = 0$ (point O) ; $\theta = 90^\circ$ donne $y = L$; $\theta = 180^\circ$ donne $y = 2L$ (sommet).



2.3 · Altitude y du système en fonction de l'angle θ

2.4 Déterminer la valeur θ_i de l'angle θ au moment du lâcher. La modélisation par un pendule simple est-elle pertinente dans ces conditions ?

Données utiles $m = 80$ kg ; $g = 9{,}80\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $L = 7{,}15$ m ; lecture graphique : $E_{pp}(t=0) = 900$ J

Au lâcher : $E_{pp}(0) = mgL(1-\cos\theta_i)$, donc

$$\cos\theta_i = 1 - \frac{E_{pp}(0)}{mgL} = 1 - \frac{900}{80\times 9{,}80\times 7{,}15} = 0{,}839$$

d'où $\theta_i = \arccos(0{,}839) = 33^\circ$.

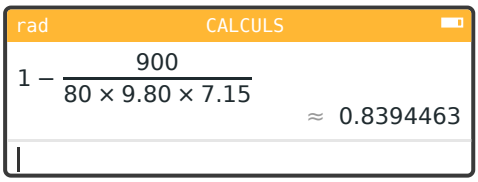
Cet angle dépasse 20° : la condition de faible amplitude, nécessaire pour utiliser la relation donnant T_0, n'est pas respectée.

$\theta_i = 33^\circ$: supérieur à 20°, la modélisation par un pendule simple de faible amplitude n'est pas strictement pertinente.

PIÈGE
Calculatrice en mode degrés pour l'arccosinus. Deux chiffres significatifs suffisent : $m = 80$ kg et la lecture de 900 J ne permettent pas mieux.

COMPRENDRE
L'écart reste faible : la période mesurée T_1 (1.3.1) est très proche de T_0. Le pendule simple donne ici un bon ordre de grandeur, même hors de son domaine de validité.

À LA CALCULATRICE



3.1 Quelle vitesse minimale faut-il atteindre au point O pour effectuer un tour complet et réaliser le record de 2015 ? Donner le résultat en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Données utiles $L = 7{,}15$ m ; $g = 9{,}80\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $E_{pp} = mgL(1 - \cos\theta)$ (2.3)

Sans frottement, l'énergie mécanique se conserve entre le point O ($\theta = 0$, $E_{pp} = 0$) et le sommet S de la trajectoire ($\theta = 180^\circ$, $E_{pp} = 2mgL$).

L'ensemble est rigide : la vitesse minimale en O est celle qui permet d'atteindre S avec une vitesse tout juste nulle.

$E_m(\text{O}) = E_m(\text{S})$: $\dfrac{1}{2} m v_{\text{min}}^2 + 0 = 0 + 2mgL$, donc

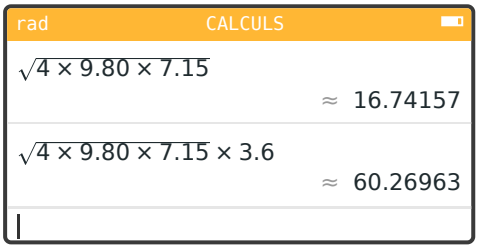
$$v_{\text{min}} = \sqrt{4gL} = \sqrt{4 \times 9{,}80 \times 7{,}15} = 16{,}7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\boxed{v_{\text{min}} = 16{,}7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 16{,}7 \times 3{,}6 = 60{,}3\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}}$$

PIÈGE
Multiplier par 3,6 la valeur déjà arrondie donne 60,1 : garder le résultat complet en mémoire pour la conversion.

COMPRENDRE
La masse se simplifie : la vitesse minimale ne dépend que de L. Avec un câble souple, il faudrait une vitesse non nulle au sommet pour qu'il reste tendu.

À LA CALCULATRICE



3.2 Lors d'une chute libre de hauteur h, la vitesse atteinte au sol est $v = \sqrt{2gh}$. Vérifier que la vitesse obtenue en 3.1 correspond à celle atteinte lors d'une chute libre de la hauteur maximale atteinte par le sportif.

Données utiles $L = 7{,}15$ m ; $g = 9{,}80\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $v_{\text{min}} = 16{,}7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (3.1)

Au sommet de la trajectoire, le sportif se trouve à la hauteur $h = 2L = 2 \times 7{,}15 = 14{,}3$ m au-dessus de O.

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g \times 2L} = \sqrt{4gL} = \sqrt{2 \times 9{,}80 \times 14{,}3} = 16{,}7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$v = \sqrt{4gL} = 16{,}7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$: même expression et même valeur qu'en 3.1 ($60{,}3\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$).

COMPRENDRE
Rien d'étonnant : dans les deux cas, seul le poids travaille, et toute l'énergie potentielle $mg \times 2L$ devient de l'énergie cinétique, quel que soit le chemin suivi.

À LA CALCULATRICE

