Corrigé complet — Bac 2026 Polynésie Jour 1

Physique-chimie, enseignement de spécialité **20 points** **3 h 30**

Ex 1	**Synthèse d'une Coumarine** Acide fort et pH · Dilution · Spectroscopie infrarouge · Mécanisme réactionnel et catalyse · Cristallisation et filtration · Rendement d'une synthèse	9 pts	1 h 35	16 questions	p. 2
Ex 2	**La scintigraphie cardiaque** Radioactivité β+ · Énergie d'un photon et longueur d'onde · Activité d'un échantillon · Loi de décroissance radioactive · Demi-vie et constante radioactive · Radioprotection	5 pts	53 min	10 questions	p. 9
Ex 3	**La saga de la découverte des trous noirs** Lois de Kepler · Deuxième loi de Newton · Repère de Frenet · Mouvement circulaire uniforme · Force gravitationnelle · Masse d'un astre attracteur	6 pts	1 h 03	8 questions	p. 12

Comment s'en servir. Fais d'abord le sujet en temps limité, puis corrige-toi exercice par exercice. À gauche de chaque question, sur les carreaux : ce qu'il faut écrire sur ta copie. À droite : les pièges, ce qu'il faut comprendre et les méthodes.

Synthèse d'une Coumarine

Bac 2026 Polynésie Jour 1 · Exercice 1 **9 points** **Durée conseillée 1 h 35**

Q1 Montrer que, pour une solution aqueuse d'un acide fort AH de concentration apportée C, le pH s'exprime par $\mathrm{pH} = -\log\left(\dfrac{C}{c^\circ}\right)$.

Un acide fort réagit totalement avec l'eau :

$$\mathrm{AH\,(aq) + H_2O\,(l) \longrightarrow A^-\,(aq) + H_3O^+\,(aq)}$$

La transformation est totale et l'eau est en excès : tout l'acide apporté est consommé, donc $n(\mathrm{H_3O^+})_f = n(\mathrm{AH})_{\text{apporté}}$. En divisant par le volume de la solution : $[\mathrm{H_3O^+}] = C$.

Or, par définition, $\mathrm{pH} = -\log\left(\dfrac{[\mathrm{H_3O^+}]}{c^\circ}\right)$.

$$\boxed{\mathrm{pH} = -\log\left(\frac{C}{c^\circ}\right)}$$

PIÈGE
Écrire seulement la définition du pH ne suffit pas : il faut justifier $[\mathrm{H_3O^+}] = C$ par le caractère total de la réaction.

COMPRENDRE
Pour un acide faible, la réaction avec l'eau est limitée : $[\mathrm{H_3O^+}] < C$, donc le pH est supérieur à $-\log(C/c^\circ)$. C'est ce critère qui sert à la question Q4.

Q2 Calculer le volume V' de solution S à prélever et détailler le protocole de préparation de la solution $\mathrm{S_1}$.

Données utiles $C = 1{,}0 \times 10^{-1}\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}$; $C_1 = 1{,}0 \times 10^{-2}\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}$; $V_1 = 100{,}0\ \mathrm{mL}$

Lors d'une dilution, la quantité de matière de soluté se conserve : $C \times V' = C_1 \times V_1$, donc

$$V' = \frac{C_1 \times V_1}{C} = \frac{1{,}0 \times 10^{-2} \times 100{,}0}{1{,}0 \times 10^{-1}} = 10\ \mathrm{mL}$$

Protocole :

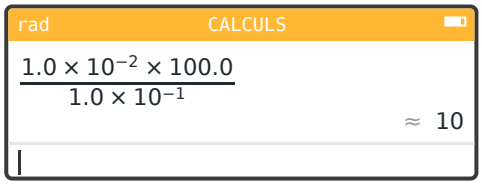
- verser un peu de solution S dans un bécher et prélever $10{,}0$ mL avec une pipette jaugée de $10{,}0$ mL munie d'une propipette ;
- introduire ce prélèvement dans une fiole jaugée de $100{,}0$ mL ;
- ajouter de l'eau distillée aux trois quarts, boucher et agiter ;
- compléter à l'eau distillée jusqu'au trait de jauge, boucher et homogénéiser.

$V' = 10$ mL, prélevés à la pipette jaugée et dilués dans une fiole jaugée de $100{,}0$ mL.

PIÈGE
Citer une éprouvette graduée ou un bécher pour mesurer les volumes : une dilution précise exige de la verrerie jaugée (pipette et fiole).

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme C et C_1. La solution est diluée 10 fois : $V_1/V' = C/C_1 = 10$, ce qui donne le résultat sans calculatrice.

À LA CALCULATRICE



Q3 Écrire l'équation modélisant la réaction entre l'acide sulfamique et l'eau.

L'acide sulfamique cède un ion $\mathrm{H^+}$ à l'eau, qui joue le rôle de base (couple $\mathrm{H_3O^+/H_2O}$) :

$$\mathrm{NH_2SO_3H\,(aq) + H_2O\,(l) \longrightarrow NH_2SO_3^-\,(aq) + H_3O^+\,(aq)}$$

COMPRENDRE
Flèche simple si l'on admet que l'acide est fort (réaction totale), ce que la question Q4 vérifie. La charge et les éléments sont conservés de part et d'autre.

Q4 À l'aide de la figure 2, vérifier que l'acide sulfamique peut être considéré comme un acide fort.

Données utiles figure 2 : $S_1\ (2;2{,}2)$, $S_2\ (3;3{,}1)$, $S_3\ (4;4{,}1)$, $S_4\ (5;5{,}3)$

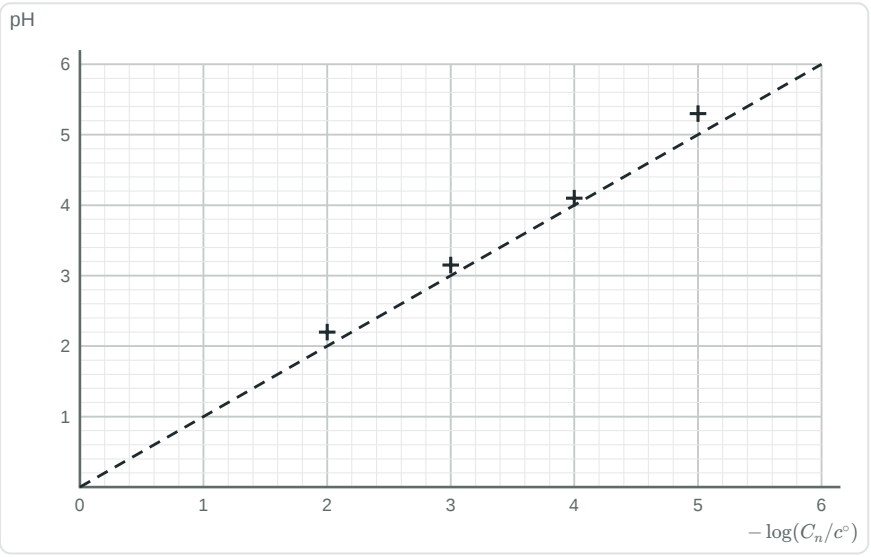
Pour un acide fort, $\mathrm{pH} = -\log\left(\dfrac{C_n}{c^\circ}\right)$ (Q1) : les points doivent être sur la droite passant par l'origine et de coefficient directeur 1.

Lecture de la figure 2 : pour $-\log(C_n/c^\circ) = 2$; 3 ; 4 ; 5, on lit $\mathrm{pH} \approx 2{,}2$; 3,1 ; 4,1 ; 5,3.

Les quatre points sont alignés et très proches de cette droite, l'écart restant de l'ordre de 0,1 à 0,3 unité de pH.

Aux incertitudes de mesure près, $\mathrm{pH} = -\log\left(\dfrac{C_n}{c^\circ}\right)$: l'acide sulfamique se comporte comme un acide fort.

MÉTHODE
Pour valider un modèle avec un graphique : tracer la droite prévue par le modèle, puis comparer la position des points expérimentaux à cette droite, en citant des valeurs lues.



Q4 · Figure 2 du sujet, avec la droite d'équation $\mathrm{pH} = -\log(C_n/c^\circ)$ en tirets

Q5 Montrer que le spectre infrarouge du produit obtenu est compatible avec la structure de la 7-hydroxy-4-méthylcoumarine (composé A).

Données utiles $O-H$: 3500 à 3700 $\mathrm{cm^{-1}}$; $C{=}O$: 1650 à 1740 $\mathrm{cm^{-1}}$; $C-O$: 1040 à 1300 $\mathrm{cm^{-1}}$

La molécule A comporte un groupe hydroxyle (liaison $O-H$) et un groupe ester (liaison $C{=}O$ et liaisons $C-O$).

Sur le spectre, on repère :

- une bande forte vers 3500 $\mathrm{cm^{-1}}$: liaison $O-H$;
- une bande très forte vers 1650 à 1700 $\mathrm{cm^{-1}}$: liaison $C{=}O$;
- des bandes fortes entre 1040 et 1300 $\mathrm{cm^{-1}}$ (vers 1080 et 1280 $\mathrm{cm^{-1}}$) : liaisons $C-O$.

Les bandes des liaisons $O-H$, $C{=}O$ et $C-O$ sont présentes : le spectre est compatible avec la structure du composé A.

PIÈGE
L'axe des nombres d'onde est gradué de droite à gauche et l'ordonnée est une transmittance : une bande d'absorption est un creux, pas un sommet.

COMPRENDRE
« Compatible » ne veut pas dire « prouvé » : un spectre infrarouge renseigne sur les liaisons présentes, pas sur l'enchaînement complet des atomes.

Q6 Calculer la valeur du rendement η_1 de cette synthèse.

Données utiles $V_R = 11{,}1$ mL ; $d = 1{,}08$; $m_{AE} = 14{,}2$ g ; $m = 12{,}4$ g ; $M_R = 110$, $M_{AE} = 130$, $M_A = 176\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Quantités de matière initiales, avec $\rho_{\text{eau}} = 1{,}00\ \text{g} \cdot \text{mL}^{-1}$:

$$n_R = \frac{d \times \rho_{\text{eau}} \times V_R}{M_R} = \frac{1{,}08 \times 1{,}00 \times 11{,}1}{110} = 0{,}109\ \text{mol}$$

$$n_{AE} = \frac{m_{AE}}{M_{AE}} = \frac{14{,}2}{130} = 0{,}109\ \text{mol}$$

L'équation indique qu'une mole de résorcinol réagit avec une mole d'acétoacétate d'éthyle pour former une mole de A. Les réactifs sont en proportions stœchiométriques : $n_{\text{max}} = 0{,}109$ mol.

Masse maximale de A : $m_{\text{max}} = n_{\text{max}} \times M_A = 0{,}109 \times 176 = 19{,}2$ g

$$\eta_1 = \frac{m}{m_{\text{max}}} = \frac{12{,}4}{19{,}2} = 0{,}646$$

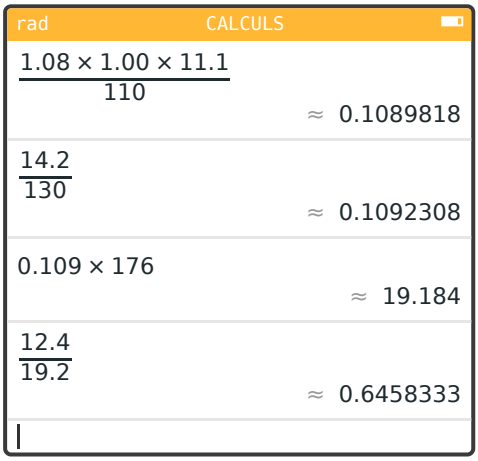
$\eta_1 = 0{,}646$, soit environ 65 %

PIÈGE
Diviser directement le volume V_R par la masse molaire. Il faut d'abord la masse : $m_R = d \times \rho_{\text{eau}} \times V_R = 12{,}0$ g.

COMPRENDRE
L'« acétylacétate d'éthyle » du tableau est l'acétoacétate d'éthyle de l'équation. La masse volumique de l'eau n'est pas rappelée par le sujet : on prend $1{,}00\ \text{g} \cdot \text{mL}^{-1}$.

MÉTHODE
Rendement : 1) quantités initiales ; 2) réactif limitant ; 3) quantité puis masse maximale de produit ; 4) rapport masse obtenue sur masse maximale.

À LA CALCULATRICE

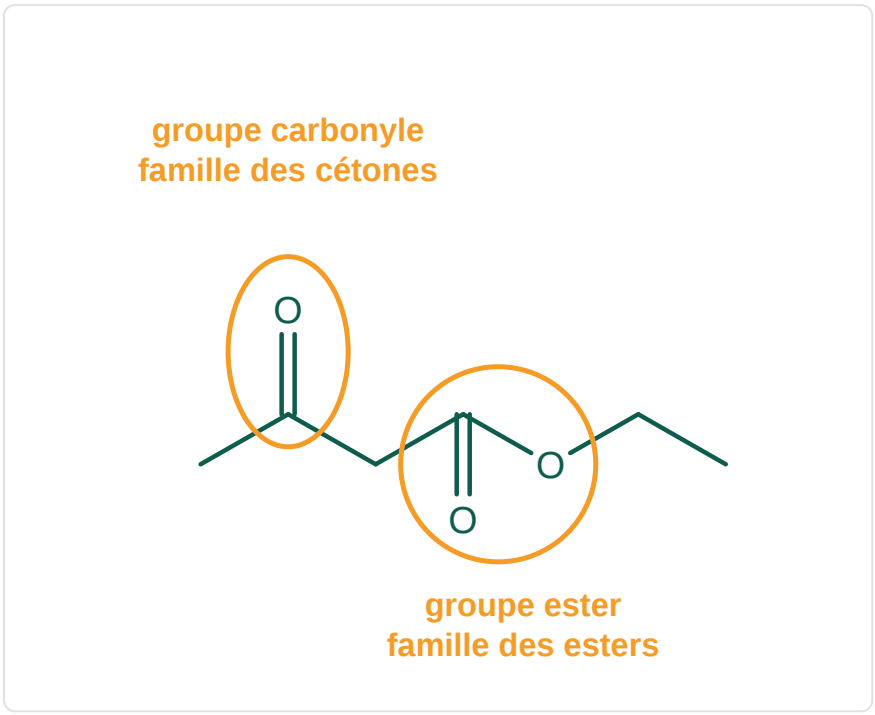


Q7 Recopier la formule topologique de l'acétoacétate d'éthyle, entourer les deux groupes caractéristiques et nommer les familles fonctionnelles correspondantes.

Voir la formule recopiée ci-dessous : le groupe $\text{C}{=}\text{O}$ lié à deux atomes de carbone est un groupe carbonyle ; le groupe $-\text{CO}-\text{O}-\text{C}$ est un groupe ester.

Groupe carbonyle : famille des cétones. Groupe ester : famille des esters.

PIÈGE
Entourer seulement le $\text{C}{=}\text{O}$ de l'ester et le nommer « cétone » : dans un ester, le carbone du $\text{C}{=}\text{O}$ est aussi lié à un atome d'oxygène, qu'il faut entourer avec lui.



Q7 · Acétoacétate d'éthyle : les deux groupes caractéristiques entourés

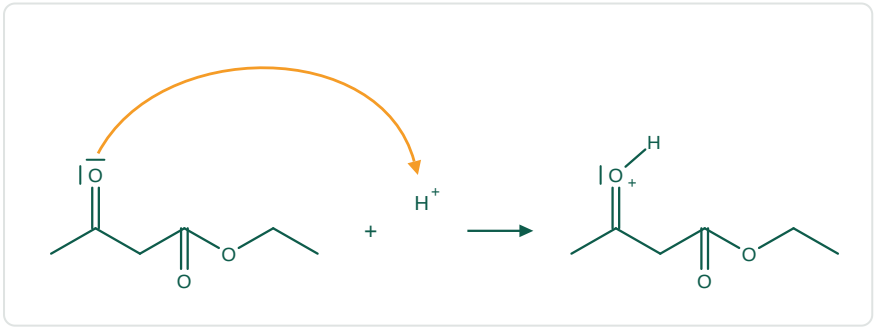
Q8 Recopier l'étape 1 du mécanisme et y placer la flèche courbe expliquant le mécanisme.

L'atome d'oxygène du groupe carbonyle porte des doublets non liants : c'est un site donneur de doublet d'électrons. L'ion H^+ est un site accepteur.

La flèche courbe part d'un doublet non liant de l'atome d'oxygène et pointe vers l'ion H^+ : la liaison $O-H$ se forme.

Flèche courbe : du doublet non liant de l'oxygène du carbonyle vers H^+ (voir le schéma).

PIÈGE
Dessiner la flèche de H^+ vers l'oxygène. Une flèche courbe représente le déplacement d'un doublet d'électrons : elle part toujours du site donneur, jamais d'une charge positive.



Q8 · Étape 1 : la flèche courbe (en orange) part d'un doublet non liant de l'oxygène et pointe vers H^+

Q9 Identifier la catégorie de réaction de l'étape 2 parmi : addition, élimination ou substitution.

Dans l'étape 2, deux espèces réagissent pour n'en former qu'une seule : le cycle du résorcinol se fixe sur l'atome de carbone du groupe $C=O$, dont la double liaison devient une liaison simple. Aucun groupe d'atomes n'est libéré.

L'étape 2 est une addition.

MÉTHODE
Compter les espèces : deux réactifs donnent un produit, c'est une addition ; un réactif donne deux produits, c'est une élimination ; deux réactifs donnent deux produits, c'est une substitution.

Q10 Donner la définition d'un catalyseur.

Un catalyseur est une espèce chimique qui augmente la vitesse d'une transformation sans figurer dans l'équation de la réaction : consommé puis régénéré, il se retrouve intact en fin de transformation.

COMPRENDRE
Le catalyseur ne modifie pas l'état final : il ne change pas le rendement, seulement la durée. Ici, H^+ consommé à l'étape 1 est restitué plus loin dans le mécanisme.

Q11 Indiquer le rôle de l'eau dans la cristallisation du produit brut recueilli dans la boîte de Pétri.

Données utiles dans l'eau : composé A insoluble ; APTS soluble

Le composé A est insoluble dans l'eau : l'ajout d'eau froide au mélange réactionnel le fait passer à l'état solide, il cristallise.

L'APTS est soluble dans l'eau : il reste dissous, comme l'éthanol formé qui est miscible à l'eau, et part avec le filtrat lors de la filtration et des rinçages.

L'eau fait cristalliser le composé A, qui y est insoluble, et retient en solution l'APTS.

COMPRENDRE
Le solide est dit « brut » car le résorcinol et l'acétoacétate d'éthyle restants, eux aussi insolubles dans l'eau, ne sont pas éliminés à ce stade.

Q12 En supposant que la transformation n'est pas totale, indiquer les espèces éliminées du solide après recristallisation dans le mélange éthanol-eau.

Données utiles tableau des solubilités dans l'eau et dans l'éthanol

La transformation n'étant pas totale, il reste du résorcinol et de l'acétoacétate d'éthyle. Insolubles dans l'eau, ils accompagnent le composé A dans le solide brut.

Ces deux espèces sont solubles dans l'éthanol, alors que le composé A y est peu soluble à froid : au refroidissement, A recristallise seul et les deux réactifs restent dans le solvant.

Espèces éliminées : le résorcinol et l'acétoacétate d'éthyle n'ayant pas réagi (ainsi que d'éventuelles traces d'APTS).

COMPRENDRE
La perte de masse vient de ces impuretés, mais aussi d'un peu de composé A resté dissous à froid : d'où la consigne d'utiliser très peu de solvant.

Q13 Indiquer, parmi les montages A, B et C de la figure 5, celui utilisant une pression réduite et un entonnoir de Büchner.

Le montage B comporte un entonnoir Büchner posé sur une fiole à vide, elle-même reliée à une trompe à eau qui aspire l'air et crée la pression réduite.

Le montage A est une filtration simple, par gravité ; le montage C utilise une ampoule munie d'un robinet et ne comporte pas de filtre.

C'est le montage B.

COMPRENDRE
L'aspiration rend la filtration plus rapide et essore le solide, qui est récupéré plus sec qu'avec une filtration par gravité.

Q14 À l'aide des données du protocole, vérifier que les réactifs ont été introduits en proportions stœchiométriques.

Données utiles $m_r = 2{,}20$ g ; $m_{AE} = 2{,}60$ g ; $M_r = 110\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M_{AE} = 130\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$

$$n_r = \frac{m_r}{M_r} = \frac{2{,}20}{110} = 2{,}00 \times 10^{-2}\ \text{mol}$$

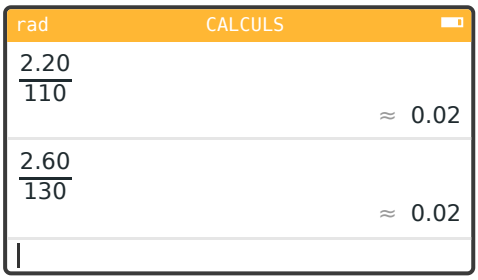
$$n_{AE} = \frac{m_{AE}}{M_{AE}} = \frac{2{,}60}{130} = 2{,}00 \times 10^{-2}\ \text{mol}$$

Dans l'équation de la réaction, les nombres stœchiométriques du résorcinol et de l'acétoacétate d'éthyle valent tous les deux 1 : le mélange est stœchiométrique si $\frac{n_r}{1} = \frac{n_{AE}}{1}$.

$n_r = n_{AE} = 2{,}00 \times 10^{-2}$ mol : les réactifs sont introduits en proportions stœchiométriques.

PIÈGE
Comparer les masses (2,20 g et 2,60 g) au lieu des quantités de matière. L'APTS, catalyseur, n'entre pas dans cette comparaison.

À LA CALCULATRICE



Q15 Calculer la valeur du rendement η_2 de cette synthèse.

Données utiles $m_A = 2{,}0$ g ; $M_A = 176\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $n_r = n_{AE} = 2{,}00 \times 10^{-2}$ mol (Q14)

Le mélange est stœchiométrique (Q14) et une mole de chaque réactif donne une mole de A : $n_{\text{max}} = n_r = 2{,}00 \times 10^{-2}$ mol.

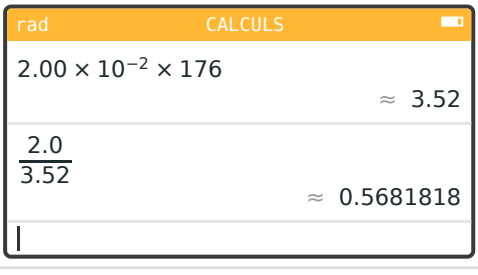
Masse maximale de A : $m_{\text{max}} = n_{\text{max}} \times M_A = 2{,}00 \times 10^{-2} \times 176 = 3{,}52$ g

$$\eta_2 = \frac{m_A}{m_{\text{max}}} = \frac{2{,}0}{3{,}52} = 0{,}57$$

$\eta_2 = 0{,}57$, soit $57\ \%$

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs seulement, car $m_A = 2{,}0$ g n'en a que deux. Un rendement est toujours inférieur ou égal à 1 : sinon, le produit est encore humide ou impur.

À LA CALCULATRICE



Q16 Discuter d'un avantage et d'un inconvénient de chaque voie de synthèse.

Données utiles voie 1 : 20 min à 130 °C, $\eta_1 \approx 65\ \%$ (Q6) ; voie 2 : 10 min à 60 °C, $\eta_2 = 57\ \%$ (Q15)

Voie 1, avec l'acide sulfamique :

- avantage : le rendement est le meilleur ($65\ \%$ contre $57\ \%$) ;
- inconvénient : il faut chauffer à 130 °C pendant 20 minutes, ce qui coûte plus d'énergie et de temps.

Voie 2, avec l'APTS :

- avantage : la synthèse se fait à température modérée (60 °C, simple bain-marie) et en 10 minutes seulement, elle est plus économe en énergie ;
- inconvénient : le rendement est plus faible, on obtient moins de produit pour une même quantité de réactifs.

La voie 1 donne plus de produit mais demande plus d'énergie et de temps ; la voie 2 est plus douce et plus rapide mais son rendement est moindre.

MÉTHODE
Pour comparer deux synthèses, s'appuyer sur des valeurs du sujet : rendement, durée, température, et éventuellement sécurité ou coût. Un argument sans chiffre rapporte rarement tous les points.

La scintigraphie cardiaque

Bac 2026 Polynésie Jour 1 · Exercice 2 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

Q1 Préciser à quel type de désintégration correspond la transformation nucléaire du thallium 201 en mercure 201.

Données utiles $^{201}_{81}\mathrm{Tl} \longrightarrow {}^{201}_{80}\mathrm{Hg}^{*} + {}^{0}_{1}\mathrm{e}$

La particule émise ${}^{0}_{1}\mathrm{e}$ a un nombre de masse nul et un nombre de charge égal à $+1$: c'est un positon.

Il s'agit d'une désintégration de type **β+** (émission d'un positon).

PIÈGE
Confondre le positon ${}^{0}_{1}\mathrm{e}$ (β+) avec l'électron ${}^{0}_{-1}\mathrm{e}$ (β−). C'est le signe du nombre de charge qui tranche.

COMPRENDRE
Les lois de conservation sont vérifiées : $201 = 201 + 0$ pour le nombre de masse et $81 = 80 + 1$ pour le nombre de charge. Le noyau fils a un proton de moins que le noyau père.

Q2 Exprimer puis calculer la longueur d'onde λ_v dans le vide du rayonnement d'énergie E.

Données utiles $E = 135$ keV ; $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J · s ; $c = 3{,}00 \times 10^{8}$ m · s^{-1} ; $1\ \mathrm{eV} = 1{,}60 \times 10^{-19}$ J

De $E = \dfrac{h\,c}{\lambda_v}$ on tire $\lambda_v = \dfrac{h\,c}{E}$.

Conversion de l'énergie en joules : $E = 135 \times 10^{3} \times 1{,}60 \times 10^{-19} = 2{,}16 \times 10^{-14}$ J.

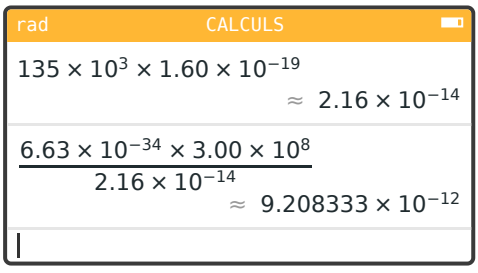
$$\lambda_v = \frac{6{,}63 \times 10^{-34} \times 3{,}00 \times 10^{8}}{2{,}16 \times 10^{-14}}$$

$\lambda_v = 9{,}21 \times 10^{-12}$ m

PIÈGE
Laisser l'énergie en keV. La relation exige E en joules : il faut convertir les keV en eV (facteur 10^3), puis les eV en joules.

COMPRENDRE
Toutes les données ont trois chiffres significatifs : le résultat en garde trois.

À LA CALCULATRICE



Q3 Retrouver le domaine du spectre électromagnétique auquel appartient ce rayonnement.

Données utiles $\lambda_v = 9{,}21 \times 10^{-12}$ m (Q2) ; limite entre rayons γ et rayons X : 10^{-11} m

$\lambda_v = 9{,}21 \times 10^{-12}\ \mathrm{m} = 0{,}921 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}$, donc $\lambda_v < 10^{-11}$ m.

Le rayonnement appartient au domaine des **rayons γ**, en accord avec l'énoncé (« photon γ »).

MÉTHODE
Pour comparer deux longueurs d'onde, les écrire avec la même puissance de dix. Ici la valeur est juste en dessous de la limite : la comparaison doit être écrite.

Q4 Citer une méthode de protection contre ces rayonnements ionisants.

Interposer un **écran** dense et épais (plomb, béton) entre la source et la personne : tablier ou paravent plombé, seringue blindée.

COMPRENDRE
Deux autres réponses sont acceptées : s'éloigner de la source, ou réduire la durée d'exposition. Une seule méthode est demandée.

Q5 Donner la relation entre l'activité $A(t)$ d'un échantillon et la dérivée temporelle $\dfrac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}$ du nombre de noyaux radioactifs.

L'activité est le nombre de désintégrations par unité de temps ; chaque désintégration fait disparaître un noyau, donc $N(t)$ diminue.

$$A(t) = -\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}$$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ ». $N(t)$ décroît, sa dérivée est négative, alors qu'une activité est toujours positive.

Q6 Établir l'équation différentielle régissant la population de noyaux radioactifs $N(t)$ sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} + \lambda\, N(t) = 0$.

Données utiles $A(t) = \lambda\, N(t)$; $A(t) = -\dfrac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}$ (Q5)

On égale les deux expressions de l'activité :

$$-\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda\, N(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} + \lambda\, N(t) = 0$$

Q7 Vérifier que $N(t) = N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$ est solution de l'équation différentielle précédente.

On dérive : $\dfrac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda\, N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

On reporte dans le premier membre de l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} + \lambda\, N(t) = -\lambda\, N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t} + \lambda\, N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t} = 0$$

De plus $N(0) = N_0\, \mathrm{e}^{0} = N_0$: la condition initiale est respectée.

$N(t) = N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$ est bien solution de $\dfrac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} + \lambda\, N(t) = 0$.

MÉTHODE
« Vérifier qu'une fonction est solution » : dériver la fonction proposée, reporter dans l'équation, constater l'égalité. Il n'est pas demandé de résoudre l'équation.

Q8 Établir l'expression de la constante radioactive λ en fonction de la demi-vie $t_{1/2}$, puis en déduire que $\lambda = 2{,}64 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1}$ pour le thallium 201.

Données utiles $t_{1/2} = 3{,}04$ jours ; 1 jour $= 86\,400$ s

La demi-vie est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux initialement présents s'est désintégrée : $N(t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{2}$.

$N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \dfrac{N_0}{2}$, donc $\mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \dfrac{1}{2}$, soit $-\lambda\, t_{1/2} = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

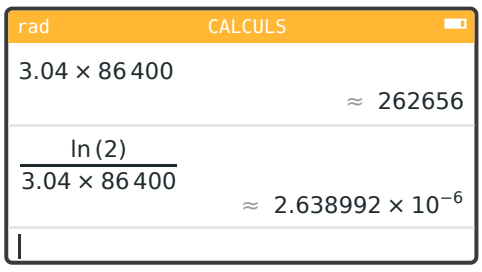
Avec $t_{1/2} = 3{,}04 \times 86\,400 = 2{,}63 \times 10^{5}$ s :

$$\lambda = \frac{\ln 2}{3{,}04 \times 86\,400}$$

$\lambda = 2{,}64 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1}$: c'est bien la valeur annoncée.

PIÈGE
Laisser la demi-vie en jours : on obtient $0{,}228\ \mathrm{j}^{-1}$, pas la valeur demandée en s^{-1}. Autre oubli fréquent : les parenthèses au dénominateur sur la calculatrice.

À LA CALCULATRICE



Q9 Calculer l'activité restante A_r chez le patient deux heures après l'injection. Conclure.

Données utiles $A_0 = 78$ MBq ; $\lambda = 2{,}64 \times 10^{-6}\ \text{s}^{-1}$ (Q8) ; $t = 2\ \text{h} = 7\,200$ s

Loi de décroissance : $A_r = A_0\,\text{e}^{-\lambda t}$, avec $t = 2 \times 3\,600 = 7\,200$ s.

$$A_r = 78 \times \text{e}^{-2{,}64\times10^{-6}\times7\,200} = 78 \times 0{,}981$$

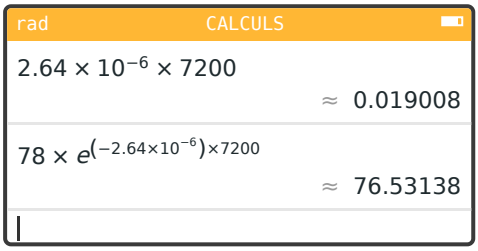
$A_r = 77$ MBq

Conclusion : en deux heures, l'activité n'a diminué que d'environ 2 %. Elle reste pratiquement constante pendant l'examen (15 à 30 minutes), ce qui convient pour l'imagerie, mais le patient est encore presque aussi radioactif qu'au moment de l'injection.

PIÈGE
Mélanger les unités dans l'exposant : λ est en s^{-1}, la durée doit être en secondes. L'activité peut rester en MBq, comme A_0.

COMPRENDRE
A_0 n'a que deux chiffres significatifs : on écrit 77 MBq. Le résultat était prévisible : 2 h est très court devant la demi-vie (73 h).

À LA CALCULATRICE



Q10 Calculer la durée $t_{1\%}$, en jours, au bout de laquelle l'activité est égale à 1 % de sa valeur initiale A_0. Justifier la nécessité de boire beaucoup d'eau après l'examen.

Données utiles $\lambda = 2{,}64 \times 10^{-6}\ \text{s}^{-1}$ (Q8) ; 1 jour $= 86\,400$ s

On cherche $t_{1\%}$ tel que $A(t_{1\%}) = \dfrac{A_0}{100}$:

$A_0\,\text{e}^{-\lambda t_{1\%}} = \dfrac{A_0}{100}$, donc $-\lambda\,t_{1\%} = \ln\left(\dfrac{1}{100}\right) = -\ln 100$.

$$t_{1\%} = \frac{\ln 100}{\lambda} = \frac{\ln 100}{2{,}64 \times 10^{-6}} = 1{,}74 \times 10^{6}\ \text{s}$$

En jours : $t_{1\%} = \dfrac{1{,}74 \times 10^{6}}{86\,400}$

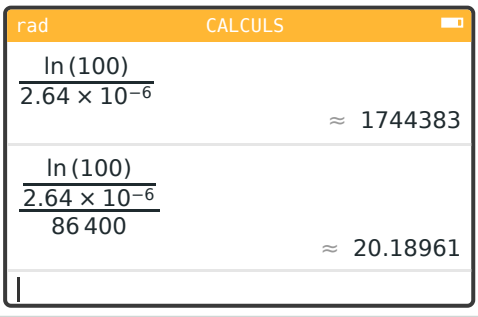
$t_{1\%} = 20{,}2$ jours

Justification : par la seule décroissance radioactive, il faut environ trois semaines pour que l'activité tombe à 1 % de sa valeur initiale. Boire beaucoup d'eau accélère l'élimination du thallium par voie urinaire : la durée d'exposition du patient et de son entourage est réduite.

PIÈGE
Écrire $\ln(0{,}01)$ sans le signe « $-$ » de l'exposant donne une durée négative. Ne pas oublier la conversion finale en jours, demandée par l'énoncé.

COMPRENDRE
Vérification : $\ln 100 / \ln 2 \approx 6{,}64$, il faut donc 6,64 demi-vies, soit $6{,}64 \times 3{,}04 \approx 20{,}2$ jours. Le résultat ne dépend pas de A_0.

À LA CALCULATRICE



La saga de la découverte des trous noirs

Bac 2026 Polynésie Jour 1 · Exercice 3 **6 points** **Durée conseillée 1 h 03**

Q1 Expliquer que la vitesse de l'étoile S2 en 2002 est supérieure à sa vitesse en 1993.

D'après la deuxième loi de Kepler, le segment reliant SgrA* (foyer F_1) à S2 balaie des aires égales pendant des durées égales.

En 2002, S2 est au plus près de F_1 : le rayon vecteur est court. En 1993, S2 est au plus loin de F_1 : le rayon vecteur est long.

Pour balayer la même aire pendant la même durée avec un rayon plus court, S2 doit parcourir un arc de trajectoire plus long.

La distance parcourue pendant une même durée est plus grande en 2002 qu'en 1993 : la vitesse de S2 est plus grande en 2002.

PIÈGE
Répondre seulement « S2 est plus proche du trou noir, donc plus rapide ». La question demande d'expliquer : il faut passer par les aires balayées et la longueur de l'arc parcouru.

COMPRENDRE
La figure 1 le confirme : entre 2001,5 et 2002 (une demi-année), S2 parcourt un arc bien plus long qu'entre 1992 et 1993 (une année entière).

Q2 À partir de la figure 1, montrer que la période de révolution T de S2 autour de SgrA* est de l'ordre de 19 ans.

Données utiles figure 1 : dates relevées près des deux extrémités du grand axe

Le grand axe est un axe de symétrie de l'ellipse : d'après la loi des aires, S2 met une demi-période pour aller d'une extrémité du grand axe à l'autre.

Sur la figure 1, l'extrémité la plus éloignée de F_1 se situe entre les positions 1992 et 1993, soit vers $1992{,}5$. L'extrémité la plus proche de F_1 est atteinte en 2002.

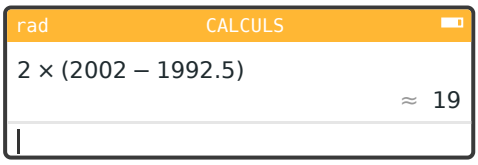
$$\frac{T}{2} \approx 2002 - 1992{,}5 = 9{,}5 \text{ ans}$$

$T \approx 2 \times 9{,}5 = 19$ ans : la période est bien de l'ordre de 19 ans.

PIÈGE
Soustraire la première date relevée de la dernière ($2002{,}2 - 1992 \approx 10$ ans) : ces positions ne couvrent qu'environ la moitié de l'ellipse, pas un tour complet.

COMPRENDRE
La lecture se fait à une demi-année près : on trouve entre 18 et 20 ans selon la date retenue. C'est pourquoi le sujet demande seulement un ordre de grandeur.

À LA CALCULATRICE



Q3 À l'aide de la deuxième loi de Newton appliquée à l'étoile S_f, exprimer son vecteur accélération $\vec{a}$ en fonction de G, M, r et $\vec{u}_n$.

Système {étoile S_f}, ponctuel, de masse m_f constante ; référentiel d'origine SgrA*, galiléen.

Seule force : la force gravitationnelle exercée par SgrA*, dirigée de S_f vers SgrA*, donc selon $\vec{u}_n$:

$$\vec{F} = \frac{G\,M\,m_f}{r^2}\,\vec{u}_n$$

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_f\,\vec{a}$, soit $\dfrac{G\,M\,m_f}{r^2}\,\vec{u}_n = m_f\,\vec{a}$.

$$\vec{a} = \frac{G\,M}{r^2}\,\vec{u}_n$$

PIÈGE
Mettre un signe « $-$ » devant $\vec{u}_n$. Sur la figure 2, $\vec{u}_n$ pointe de S_f vers SgrA* : la force attractive et l'accélération sont selon $+\vec{u}_n$.

COMPRENDRE
La masse m_f se simplifie : l'accélération, donc le mouvement, ne dépend pas de la masse de l'étoile, seulement de celle du trou noir.

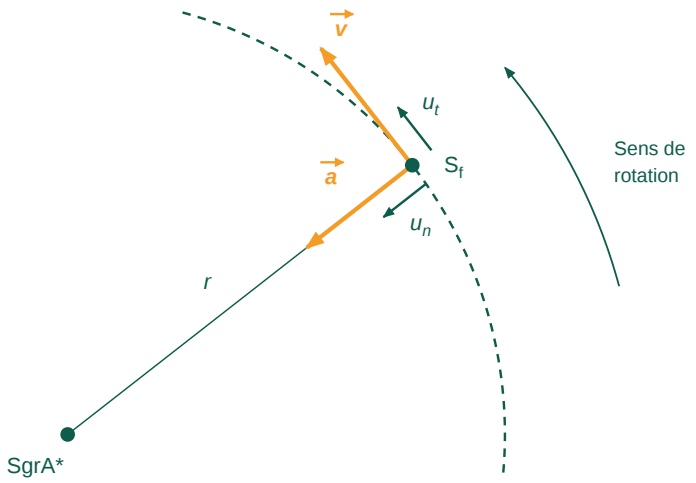
Q4 Recopier la figure 2, sans souci d'échelle, et représenter au point S_f les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$.

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ a pour origine S_f ; il est tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement, donc selon $\vec{u}_t$.

Le vecteur accélération $\vec{a}$ a pour origine S_f ; d'après Q3, il est porté par le rayon et dirigé vers SgrA*, donc selon $\vec{u}_n$.

$\vec{v}$ tangent à la trajectoire, dans le sens de rotation ; $\vec{a}$ dirigé vers SgrA* ; les deux vecteurs sont perpendiculaires.

PIÈGE
Tracer $\vec{a}$ dans le sens du mouvement ou vers l'extérieur de la trajectoire. Les deux vecteurs partent du point S_f, pas de SgrA*.



Q4 · Figure 2 recopiée, avec les vecteurs vitesse et accélération

Q5 En utilisant l'expression du vecteur accélération dans la base de Frenet, montrer que le mouvement de l'étoile S_f est circulaire uniforme.

Données utiles $\vec{a} = \dfrac{G\,M}{r^2}\,\vec{u}_n$ (Q3)

Dans la base de Frenet, pour une trajectoire circulaire de rayon r :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_t + \frac{v^2}{r}\,\vec{u}_n$$

D'après Q3 : $\vec{a} = 0\,\vec{u}_t + \dfrac{G\,M}{r^2}\,\vec{u}_n$.

Par identification selon $\vec{u}_t$:

$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$: la valeur v de la vitesse est constante, le mouvement circulaire est **uniforme**.

PIÈGE
Écrire « $\vec{a}$ est constant, donc le mouvement est uniforme ». Le vecteur $\vec{a}$ change de direction à chaque instant : c'est sa composante tangentielle nulle qui prouve l'uniformité.

MÉTHODE
Orbite circulaire : 1) deuxième loi de Newton ; 2) $\vec{a}$ dans la base de Frenet ; 3) identification. Selon $\vec{u}_t$: mouvement uniforme. Selon $\vec{u}_n$: la vitesse (Q6).

Q6 Montrer que l'expression de la vitesse v de l'étoile S_f est $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$.

Par identification des deux expressions de $\vec{a}$ (Q5) selon $\vec{u}_n$:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{G\,M}{r^2}$$

donc $v^2 = \frac{G\,M}{r}$, et comme $v > 0$:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{G\,M}{r}}}$$

COMPRENDRE
Plus le rayon de l'orbite est grand, plus la vitesse est faible. Vérification des unités : $G\,M/r$ s'exprime en $\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}$, sa racine est bien une vitesse.

Q7 T étant la période de révolution de l'étoile autour de SgrA*, retrouver l'expression de la troisième loi de Kepler : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$.

Données utiles $v = \sqrt{\frac{G\,M}{r}}$ (Q6)

Le mouvement est uniforme : pendant une période T, l'étoile parcourt le périmètre $2\pi r$ du cercle à la vitesse v.

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{G\,M}}$$

En élevant au carré : $T^2 = 4\pi^2 r^2 \times \frac{r}{G\,M} = \frac{4\pi^2 r^3}{G\,M}$

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M}}$$

PIÈGE
Oublier d'élever 2π au carré, ou écrire $T = v/(2\pi r)$. Contrôle rapide : une période est une distance divisée par une vitesse.

COMPRENDRE
L'énoncé écrit « l'étoile S » : il s'agit de l'étoile fictive S_f, dont la période est la même que celle de S2.

Q8 Déterminer la valeur de la masse M du trou noir SgrA*. Comparer à la valeur annoncée dans l'article et commenter.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$; $M_S = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg ; $r = 1{,}74 \times 10^{11}$ km ; $T = 19$ ans ; article : $M \approx 4{,}4$ millions de masses solaires

D'après la troisième loi de Kepler (Q7) : $M = \dfrac{4\pi^2 r^3}{G\,T^2}$

Conversions : $r = 1{,}74 \times 10^{14}$ m ; $T = 19 \times 365{,}25 \times 24 \times 3600 = 6{,}00 \times 10^{8}$ s.

$$M = \frac{4\pi^2 \times (1{,}74 \times 10^{14})^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (6{,}00 \times 10^{8})^2} = 8{,}7 \times 10^{36}\ \text{kg}$$

En masses solaires : $\dfrac{M}{M_S} = \dfrac{8{,}7 \times 10^{36}}{1{,}99 \times 10^{30}} = 4{,}4 \times 10^{6}$

$M = 8{,}7 \times 10^{36}$ kg, soit environ $4{,}4$ millions de masses solaires : le résultat confirme la valeur annoncée dans l'article.

Commentaire : l'accord est très bon alors que la période n'est connue qu'à une année près ; le modèle de l'orbite circulaire équivalente suffit pour estimer la masse du trou noir.

PIÈGE
Laisser r en kilomètres ou T en années : G est en unités SI, il faut des mètres et des secondes. L'erreur sur r est multipliée par 10^9 à cause du cube.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs seulement, car $T = 19$ ans n'en a que deux. Prendre une année de 365 jours ne change pas le résultat arrondi.

MÉTHODE
« Comparer » demande un chiffre : exprimer M dans l'unité de l'article (la masse solaire), puis conclure. On peut aussi calculer l'écart relatif, ici inférieur à 2 %.

À LA CALCULATRICE

