La saga de la découverte des trous noirs

Bac 2026 Polynésie Jour 1 · Exercice 3 **6 points** **Durée conseillée 1 h 03**

Q1 Expliquer que la vitesse de l'étoile S2 en 2002 est supérieure à sa vitesse en 1993.

D'après la deuxième loi de Kepler, le segment reliant SgrA* (foyer F_1) à S2 balaie des aires égales pendant des durées égales.

En 2002, S2 est au plus près de F_1 : le rayon vecteur est court. En 1993, S2 est au plus loin de F_1 : le rayon vecteur est long.

Pour balayer la même aire pendant la même durée avec un rayon plus court, S2 doit parcourir un arc de trajectoire plus long.

La distance parcourue pendant une même durée est plus grande en 2002 qu'en 1993 : la vitesse de S2 est plus grande en 2002.

PIÈGE
Répondre seulement « S2 est plus proche du trou noir, donc plus rapide ». La question demande d'expliquer : il faut passer par les aires balayées et la longueur de l'arc parcouru.

COMPRENDRE
La figure 1 le confirme : entre 2001,5 et 2002 (une demi-année), S2 parcourt un arc bien plus long qu'entre 1992 et 1993 (une année entière).

Q2 À partir de la figure 1, montrer que la période de révolution T de S2 autour de SgrA* est de l'ordre de 19 ans.

Données utiles figure 1 : dates relevées près des deux extrémités du grand axe

Le grand axe est un axe de symétrie de l'ellipse : d'après la loi des aires, S2 met une demi-période pour aller d'une extrémité du grand axe à l'autre.

Sur la figure 1, l'extrémité la plus éloignée de F_1 se situe entre les positions 1992 et 1993, soit vers $1992{,}5$. L'extrémité la plus proche de F_1 est atteinte en 2002.

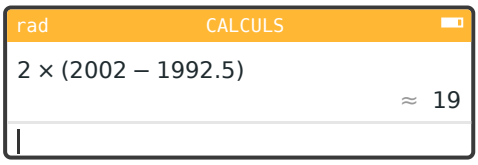
$$\frac{T}{2} \approx 2002 - 1992{,}5 = 9{,}5 \text{ ans}$$

$T \approx 2 \times 9{,}5 = 19$ ans : la période est bien de l'ordre de 19 ans.

PIÈGE
Soustraire la première date relevée de la dernière ($2002{,}2 - 1992 \approx 10$ ans) : ces positions ne couvrent qu'environ la moitié de l'ellipse, pas un tour complet.

COMPRENDRE
La lecture se fait à une demi-année près : on trouve entre 18 et 20 ans selon la date retenue. C'est pourquoi le sujet demande seulement un ordre de grandeur.

À LA CALCULATRICE



Q3 À l'aide de la deuxième loi de Newton appliquée à l'étoile S_f, exprimer son vecteur accélération $\vec{a}$ en fonction de G, M, r et $\vec{u}_n$.

Système {étoile S_f}, ponctuel, de masse m_f constante ; référentiel d'origine SgrA*, galiléen.

Seule force : la force gravitationnelle exercée par SgrA*, dirigée de S_f vers SgrA*, donc selon $\vec{u}_n$:

$$\vec{F} = \frac{G\,M\,m_f}{r^2}\,\vec{u}_n$$

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_f\,\vec{a}$, soit $\frac{G\,M\,m_f}{r^2}\,\vec{u}_n = m_f\,\vec{a}$.

$$\vec{a} = \frac{G\,M}{r^2}\,\vec{u}_n$$

PIÈGE
Mettre un signe « $-$ » devant $\vec{u}_n$. Sur la figure 2, $\vec{u}_n$ pointe de S_f vers SgrA* : la force attractive et l'accélération sont selon $+\vec{u}_n$.

COMPRENDRE
La masse m_f se simplifie : l'accélération, donc le mouvement, ne dépend pas de la masse de l'étoile, seulement de celle du trou noir.

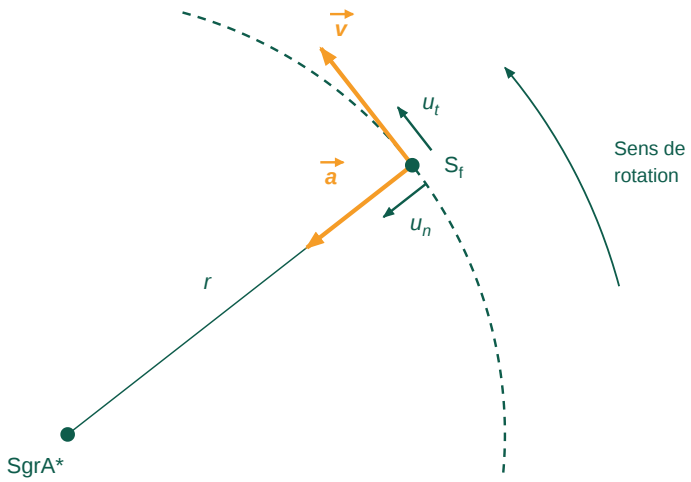
Q4 Recopier la figure 2, sans souci d'échelle, et représenter au point S_f les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$.

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ a pour origine S_f ; il est tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement, donc selon $\vec{u}_t$.

Le vecteur accélération $\vec{a}$ a pour origine S_f ; d'après Q3, il est porté par le rayon et dirigé vers SgrA*, donc selon $\vec{u}_n$.

$\vec{v}$ tangent à la trajectoire, dans le sens de rotation ; $\vec{a}$ dirigé vers SgrA* ; les deux vecteurs sont perpendiculaires.

PIÈGE
Tracer $\vec{a}$ dans le sens du mouvement ou vers l'extérieur de la trajectoire. Les deux vecteurs partent du point S_f, pas de SgrA*.



Q4 · Figure 2 recopiée, avec les vecteurs vitesse et accélération

Q5 En utilisant l'expression du vecteur accélération dans la base de Frenet, montrer que le mouvement de l'étoile S_f est circulaire uniforme.

Données utiles $\vec{a} = \dfrac{G\,M}{r^2}\,\vec{u}_n$ (Q3)

Dans la base de Frenet, pour une trajectoire circulaire de rayon r :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_t + \frac{v^2}{r}\,\vec{u}_n$$

D'après Q3 : $\vec{a} = 0\,\vec{u}_t + \dfrac{G\,M}{r^2}\,\vec{u}_n$.

Par identification selon $\vec{u}_t$:

$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$: la valeur v de la vitesse est constante, le mouvement circulaire est **uniforme**.

PIÈGE
Écrire « $\vec{a}$ est constant, donc le mouvement est uniforme ». Le vecteur $\vec{a}$ change de direction à chaque instant : c'est sa composante tangentielle nulle qui prouve l'uniformité.

MÉTHODE
Orbite circulaire : 1) deuxième loi de Newton ; 2) $\vec{a}$ dans la base de Frenet ; 3) identification. Selon $\vec{u}_t$: mouvement uniforme. Selon $\vec{u}_n$: la vitesse (Q6).

Q6 Montrer que l'expression de la vitesse v de l'étoile S_f est $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$.

Par identification des deux expressions de $\vec{a}$ (Q5) selon $\vec{u}_n$:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{G\,M}{r^2}$$

donc $v^2 = \frac{G\,M}{r}$, et comme $v > 0$:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{G\,M}{r}}}$$

COMPRENDRE
Plus le rayon de l'orbite est grand, plus la vitesse est faible. Vérification des unités : $G\,M/r$ s'exprime en $\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}$, sa racine est bien une vitesse.

Q7 T étant la période de révolution de l'étoile autour de SgrA*, retrouver l'expression de la troisième loi de Kepler : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$.

Données utiles $v = \sqrt{\frac{G\,M}{r}}$ (Q6)

Le mouvement est uniforme : pendant une période T, l'étoile parcourt le périmètre $2\pi r$ du cercle à la vitesse v.

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{G\,M}}$$

En élevant au carré : $T^2 = 4\pi^2 r^2 \times \frac{r}{G\,M} = \frac{4\pi^2 r^3}{G\,M}$

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M}}$$

PIÈGE
Oublier d'élever 2π au carré, ou écrire $T = v/(2\pi r)$. Contrôle rapide : une période est une distance divisée par une vitesse.

COMPRENDRE
L'énoncé écrit « l'étoile S » : il s'agit de l'étoile fictive S_f, dont la période est la même que celle de S2.

Q8 Déterminer la valeur de la masse M du trou noir SgrA*. Comparer à la valeur annoncée dans l'article et commenter.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$; $M_S = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg ; $r = 1{,}74 \times 10^{11}$ km ; $T = 19$ ans ; article : $M \approx 4{,}4$ millions de masses solaires

D'après la troisième loi de Kepler (Q7) : $M = \dfrac{4\pi^2 r^3}{G\,T^2}$

Conversions : $r = 1{,}74 \times 10^{14}$ m ; $T = 19 \times 365{,}25 \times 24 \times 3600 = 6{,}00 \times 10^{8}$ s.

$$M = \frac{4\pi^2 \times (1{,}74 \times 10^{14})^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (6{,}00 \times 10^{8})^2} = 8{,}7 \times 10^{36}\ \text{kg}$$

En masses solaires : $\dfrac{M}{M_S} = \dfrac{8{,}7 \times 10^{36}}{1{,}99 \times 10^{30}} = 4{,}4 \times 10^{6}$

$M = 8{,}7 \times 10^{36}$ kg, soit environ $4{,}4$ millions de masses solaires : le résultat confirme la valeur annoncée dans l'article.

Commentaire : l'accord est très bon alors que la période n'est connue qu'à une année près ; le modèle de l'orbite circulaire équivalente suffit pour estimer la masse du trou noir.

PIÈGE
Laisser r en kilomètres ou T en années : G est en unités SI, il faut des mètres et des secondes. L'erreur sur r est multipliée par 10^9 à cause du cube.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs seulement, car $T = 19$ ans n'en a que deux. Prendre une année de 365 jours ne change pas le résultat arrondi.

MÉTHODE
« Comparer » demande un chiffre : exprimer M dans l'unité de l'article (la masse solaire), puis conclure. On peut aussi calculer l'écart relatif, ici inférieur à 2 %.

À LA CALCULATRICE

