Étude d'une éruption volcanique

Bac 2026 Métropole Septembre Jour 1 · Exercice 1 **11 points** **Durée conseillée 1 h 56**

Q1 Dans le modèle de la chute libre, écrire la relation entre l'énergie mécanique du système au point O et celle au point S, sommet de la trajectoire.

En chute libre, le pyroclaste n'est soumis qu'à son poids, qui est une force conservative : l'énergie mécanique se conserve.

$$E_m(O) = E_m(S)$$

COMPRENDRE
Sans frottement, aucune force non conservative ne travaille : l'énergie cinétique perdue pendant la montée est intégralement convertie en énergie potentielle de pesanteur.

Q2 Montrer que l'altitude maximale s'écrit $h = \dfrac{v_0^2 - v_S^2}{2\,g}$.

$E_m = E_c + E_{pp} = \dfrac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,y$, avec $E_{pp} = 0$ pour $y = 0$.

En O : $y = 0$ et $v = v_0$. En S : $y = h$ et $v = v_S$. La conservation de l'énergie mécanique (Q1) donne :

$$\frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + 0 = \frac{1}{2}\,m\,v_S^2 + m\,g\,h$$

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,\left(v_0^2 - v_S^2\right)$$

$$h = \frac{v_0^2 - v_S^2}{2\,g}$$

PIÈGE
Écrire $v_S = 0$ au sommet. Seule la coordonnée verticale de la vitesse s'annule : le pyroclaste garde sa vitesse horizontale, d'où le terme v_S^2.

Q3 Déterminer, à l'aide de la figure 3, la valeur de la vitesse initiale v_0.

Données utiles figure 3 : modélisation $v_y = -2{,}7\,t + 12{,}8$; v_x constante, voisine de $1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

À $t = 0$, on lit sur la figure 3 : $v_x(0) \approx 1{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et, d'après la modélisation, $v_y(0) = 12{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

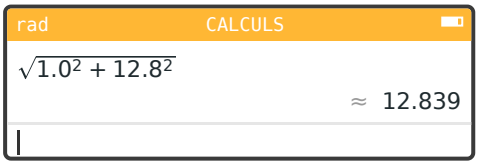
$$v_0 = \sqrt{v_x(0)^2 + v_y(0)^2} = \sqrt{1{,}0^2 + 12{,}8^2} = 12{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v_0 \approx 13\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

COMPRENDRE
La lecture de v_x sur le graphique ne donne que deux chiffres significatifs : le résultat est arrondi à deux chiffres. On garde $12{,}8$ pour les calculs suivants.

MÉTHODE
Pour une valeur à $t = 0$, utiliser l'ordonnée à l'origine de la droite modèle plutôt que le premier point expérimental, qui porte une erreur de pointage.

À LA CALCULATRICE



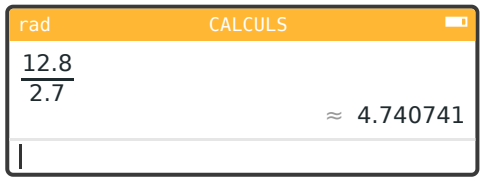
Q4 Montrer, à l'aide de la figure 3, que la valeur de la vitesse au sommet de la trajectoire est voisine de $1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Au sommet S, le vecteur vitesse est horizontal : $v_y = 0$, donc $v_S = \sqrt{v_x^2 + 0} = v_x$.

Sur la figure 3, v_y s'annule vers $t = 4{,}7$ s et, à cette date comme à toutes les autres, $v_x \approx 1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

$v_S = v_x \approx 1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, valeur attendue.

À LA CALCULATRICE



Q5 En déduire la valeur de l'altitude maximale h atteinte par le pyroclaste, dans le cadre du modèle de la chute libre.

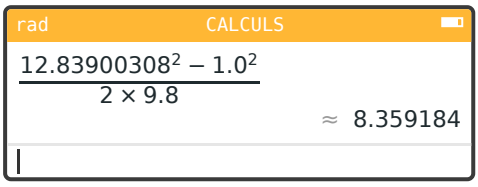
Données utiles $v_0 = 12{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (Q3) ; $v_S = 1{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (Q4) ; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

$$h = \frac{v_0^2 - v_S^2}{2\,g} = \frac{12{,}8^2 - 1{,}0^2}{2 \times 9{,}8}$$

$h = 8{,}4\ \text{m}$

COMPRENDRE
Avec la valeur arrondie $v_0 = 13\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, on trouve $8{,}6$ m : les deux résultats sont acceptables, l'écart vient seulement de l'arrondi intermédiaire.

À LA CALCULATRICE



Q6 En exploitant la photographie de la figure 2 et son échelle, indiquer si l'altitude maximale du pyroclaste est compatible avec le modèle précédent.

Données utiles échelle verticale : 1,0 cm pour 16 m ; $h = 8{,}4$ m (Q5)

Sur la photographie, le sommet de la trajectoire du pyroclaste étudié se trouve à environ $3{,}2$ cm au-dessus de l'axe (Ox).

$$h_{\text{photo}} = 3{,}2 \times 16 = 51\ \text{m}$$

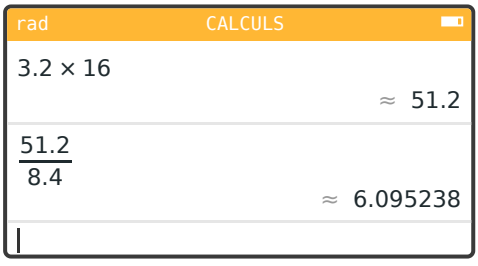
Le modèle de la chute libre prévoit $8{,}4$ m, soit environ 6 fois moins.

$h_{\text{photo}} \approx 50\ \text{m}$: l'altitude observée n'est pas compatible avec le modèle de la chute libre, qui est à rejeter.

PIÈGE
Se contenter de « c'est différent ». Il faut mesurer à la règle sur la photographie, convertir avec l'échelle, puis comparer les deux valeurs chiffrées avant de conclure.

COMPRENDRE
Un pyroclaste qui monte bien plus haut que prévu subit une force vers le haut que le modèle a oubliée : c'est la poussée des gaz introduite ensuite.

À LA CALCULATRICE



Q7 Déterminer les expressions des coordonnées a_x et a_y du vecteur accélération du pyroclaste, en fonction de g, m et F.

Système {pyroclaste}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Forces : le poids $\vec{P} = -m\,g\,\vec{j}$ et la poussée des gaz $\vec{F} = F\,\vec{j}$.

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{F} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{a} = (F - m\,g)\,\vec{j}$.

$a_x = 0 \qquad a_y = \dfrac{F}{m} - g$

PIÈGE
Oublier le signe du poids : l'axe (Oy) est orienté vers le haut, donc $P_y = -m\,g$ et $F_y = +F$.

Q8 Montrer que $v_x(t) = v_0 \cos\alpha$ et $v_y(t) = \left(\frac{F}{m} - g\right) t + v_0 \sin\alpha$.

Comme $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives de a_x et a_y (constantes, Q7) :

$$v_x(t) = C_1 \qquad v_y(t) = \left(\frac{F}{m} - g\right) t + C_2$$

Conditions initiales : à $t = 0$, $\vec{v}_0$ fait l'angle α avec (Ox), donc $v_x(0) = v_0 \cos\alpha$ et $v_y(0) = v_0 \sin\alpha$.

D'où $C_1 = v_0 \cos\alpha$ et $C_2 = v_0 \sin\alpha$.

$$\boxed{v_x(t) = v_0 \cos\alpha \qquad v_y(t) = \left(\frac{F}{m} - g\right) t + v_0 \sin\alpha}$$

MÉTHODE
Toujours trois temps : primitive avec une constante, valeur de la vitesse à $t = 0$ lue sur le schéma, identification de la constante. Une constante posée sans justification coûte des points.

Q9 Justifier, à l'aide de la figure 3, que le modèle adopté est correct et montrer que la valeur F de la force de poussée est voisine de 24 N.

Données utiles figure 3 : $v_y = -2{,}7\,t + 12{,}8$; $m = 3{,}4$ kg ; $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

Le modèle prévoit v_x constante et v_y fonction affine du temps. Sur la figure 3, les points v_x sont alignés sur une droite horizontale et les points v_y sur une droite décroissante : le modèle est correct.

De plus, la pente de v_y vaut $-2{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ et non $-g = -9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$: il existe bien une force dirigée vers le haut.

Par identification du coefficient directeur : $\frac{F}{m} - g = -2{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, donc

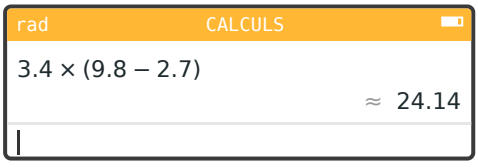
$$F = m\,(g - 2{,}7) = 3{,}4 \times (9{,}8 - 2{,}7) = 24\ \mathrm{N}$$

$\boxed{F = 24\ \mathrm{N}}$, valeur attendue.

PIÈGE
Écrire $F/m - g = +2{,}7$. Le coefficient directeur de la droite est négatif ; une erreur de signe donne $F = 43$ N.

COMPRENDRE
Le poids vaut $m\,g = 33$ N : la poussée reste inférieure au poids, le pyroclaste ralentit donc en montant, mais bien moins vite qu'en chute libre.

À LA CALCULATRICE



Q10 Montrer que l'équation d'état du gaz parfait conduit à la relation $P\,M = \rho\,R\,T$.

La quantité de matière du gaz est $n = \frac{m}{M}$. L'équation d'état devient :

$$P\,V = \frac{m}{M}\,R\,T \quad \text{soit} \quad P\,M = \frac{m}{V}\,R\,T$$

Or la masse volumique du gaz est $\rho = \frac{m}{V}$.

$\boxed{P\,M = \rho\,R\,T}$

Q11 Déterminer la valeur de l'accélération ascendante du volume de gaz chaud. Commenter le résultat.

Données utiles $P = 8{,}7 \times 10^4$ Pa ; $M = 22$ g · mol^{-1} ; $R = 8{,}31$ J · mol^{-1} · K^{-1} ; $T = 1300$ K ; $\rho_{\text{air}} = 0{,}91$ kg · m^{-3} ; $g = 9{,}8$ m · s^{-2}

Masse volumique des gaz chauds (Q10), avec $M = 22 \times 10^{-3}$ kg · mol^{-1} :

$$\rho = \frac{P\,M}{R\,T} = \frac{8{,}7 \times 10^4 \times 22 \times 10^{-3}}{8{,}31 \times 1300} = 0{,}177 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$a = g \cdot \frac{\rho_{\text{air}} - \rho}{\rho} = 9{,}8 \times \frac{0{,}91 - 0{,}177}{0{,}177}$$

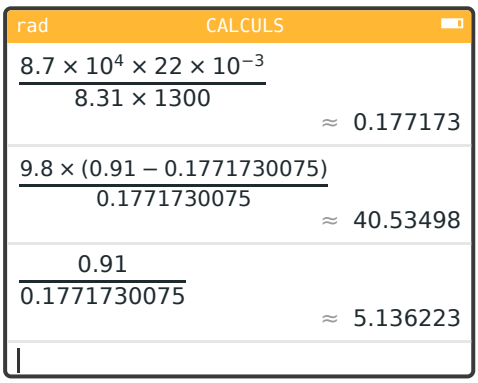
$$\boxed{a = 41 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

Commentaire : $a > 0$, les gaz chauds, environ 5 fois moins denses que l'air ambiant, sont bien accélérés vers le haut. Cette accélération vaut environ $4\,g$: l'ascension est très rapide, ce qui explique que les gaz puissent pousser le pyroclaste.

PIÈGE
Laisser M en g · mol^{-1} : on obtient $\rho = 177$ kg · m^{-3} et une accélération négative. Dans $P\,M = \rho\,R\,T$, tout est en unités SI, donc M en kg · mol^{-1}.

COMPRENDRE
« Commenter » attend un signe, un ordre de grandeur comparé à g et un lien avec la situation. Avec ρ arrondie à $0{,}18$, on trouve 40 m · s^{-2}, également accepté.

À LA CALCULATRICE



Q12 Exprimer, avec le premier principe, la variation d'énergie interne ΔU du système pendant Δt en fonction du flux thermique φ. En déduire une relation entre m, c, φ, Δt et $\Delta\theta$.

Premier principe appliqué au système {pyroclaste}, au repos macroscopique : $\Delta U = W + Q$.

Le système est incompressible : il n'échange pas de travail, $W = 0$. Le transfert thermique reçu pendant Δt est $Q = \varphi\,\Delta t$. Donc :

$$\Delta U = \varphi\,\Delta t$$

Pour un système incompressible : $\Delta U = m\,c\,\Delta\theta$.

$$\boxed{m\,c\,\Delta\theta = \varphi\,\Delta t}$$

COMPRENDRE
φ est une grandeur algébrique, comptée positivement si elle est reçue. Ici le pyroclaste est plus chaud que l'air : $\varphi < 0$ et $\Delta\theta < 0$, il se refroidit.

Q13 Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\theta}{\tau} = \dfrac{\theta_{\text{amb}}}{\tau}$ avec $\tau = \dfrac{m\,c}{h\,S}$.

On remplace φ par la loi de Newton dans la relation de Q12 :

$$m\,c\,\Delta\theta = h\,S\,(\theta_{\text{amb}} - \theta(t))\,\Delta t \quad \text{soit} \quad \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{h\,S}{m\,c}\,(\theta_{\text{amb}} - \theta(t))$$

Comme Δt est très faible, $\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ tend vers la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$:

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{h\,S}{m\,c}\,\theta(t) = \frac{h\,S}{m\,c}\,\theta_{\text{amb}}$$

En posant $\tau = \dfrac{m\,c}{h\,S}$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\theta(t)}{\tau} = \frac{\theta_{\text{amb}}}{\tau}}$$

PIÈGE
Passer de $\Delta\theta/\Delta t$ à la dérivée sans le dire. La phrase « Δt tend vers zéro » fait partie de la démonstration attendue.

Q14 Montrer que la grandeur $\dfrac{m\,c}{h\,S}$ est homogène à un temps.

Unités : m en kg ; c en $\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$; h en $\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-2}}$; S en $\mathrm{m^2}$.

$$\left[\frac{m\,c}{h\,S}\right] = \frac{\mathrm{kg}\times\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}}{\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-2}}\times\mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{J\cdot K^{-1}}}{\mathrm{W\cdot K^{-1}}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{W}}$$

Or une puissance est une énergie divisée par une durée : $1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J\cdot s^{-1}}$, donc $\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{W}} = \mathrm{s}$.

$\dfrac{m\,c}{h\,S}$ s'exprime en secondes : cette grandeur est homogène à un temps.

MÉTHODE
Autre voie : dans l'équation différentielle, $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\theta}{\tau}$ s'ajoutent, donc ont la même unité, ce qui impose τ en secondes.

Q15 Exprimer $\theta(0)$ et la limite θ_{lim} de $\theta(t)$ quand $t \to +\infty$ en fonction de A et B. En déduire A et B en fonction de θ_0 et θ_{amb}.

À $t = 0$: $\mathrm{e}^0 = 1$, donc $\theta(0) = A + B$.

Quand $t \to +\infty$: $\mathrm{e}^{-t/\tau} \to 0$, donc $\theta_{\text{lim}} = B$.

Or $\theta(0) = \theta_0$ et, au bout d'un temps très long, le pyroclaste est à l'équilibre thermique avec l'air : $\theta_{\text{lim}} = \theta_{\text{amb}}$.

Donc $B = \theta_{\text{amb}}$ et $A + B = \theta_0$.

$$\boxed{A = \theta_0 - \theta_{\text{amb}} \qquad B = \theta_{\text{amb}}}$$

COMPRENDRE
On retrouve $\theta_{\text{lim}} = \theta_{\text{amb}}$ par l'équation différentielle : quand la température ne varie plus, $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0$, il reste $\theta = \theta_{\text{amb}}$.

Q16 Déterminer la valeur de la constante de temps τ.

Données utiles figure 4 : droite modèle passant par les points $(0\,;5{,}1)$ et $(700\ \mathrm{s}\,;2{,}0)$

D'après $\ln(\theta(t) - \theta_{\text{amb}}) = K - \dfrac{t}{\tau}$, la droite de la figure 4 a pour coefficient directeur $-\dfrac{1}{\tau}$.

Avec deux points éloignés de la droite modèle, $(0\,;5{,}1)$ et $(700\ \mathrm{s}\,;2{,}0)$:

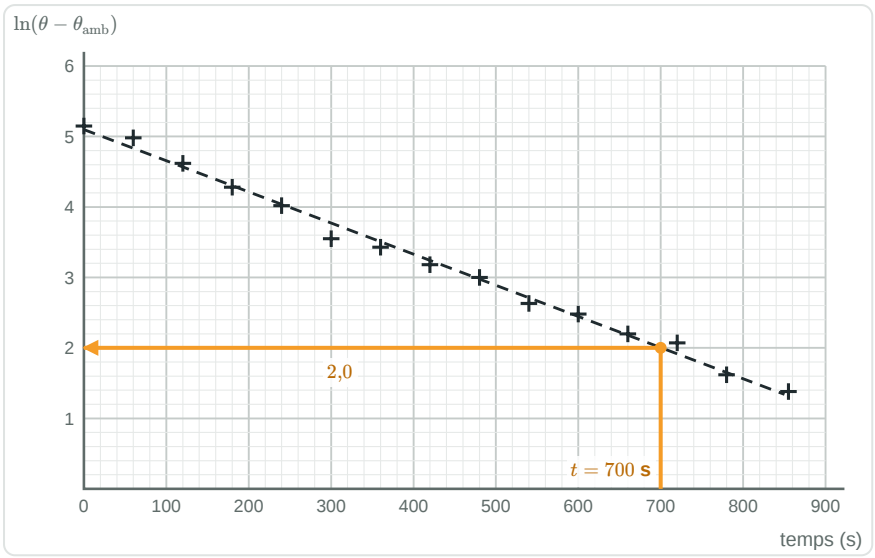
$$-\frac{1}{\tau} = \frac{2{,}0 - 5{,}1}{700 - 0} = -4{,}4\times10^{-3}\ \mathrm{s^{-1}}$$

$$\tau = \frac{700}{5{,}1 - 2{,}0} = 226\ \mathrm{s}$$

$$\boxed{\tau \approx 2{,}3\times10^{2}\ \mathrm{s}}$$

PIÈGE
Donner τ négatif, ou confondre τ avec le coefficient directeur : τ est l'opposé de son inverse.

MÉTHODE
Prendre deux points sur la droite modèle, pas deux croix expérimentales, et les choisir éloignés pour réduire l'incertitude de lecture.



Q16 · Figure 4 du sujet : droite modèle et points utilisés

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{2.0 - 5.1}{700} \approx -0.004428571$

$\frac{700}{5.1 - 2.0} \approx 225.8065$

Q17 En déduire la valeur du coefficient h d'échange thermique surfacique entre la pierre ponce et l'air ambiant. Commenter le résultat à l'aide du tableau.

Données utiles $\tau = 226$ s (Q16) ; $m_{pierre} = 1{,}6 \times 10^{-2}$ kg ; $c_{pierre} = 1{,}0 \times 10^{3}$ J · kg^{-1} · K^{-1} ; $S_{pierre} = 5{,}5 \times 10^{-3}$ m^2

De $\tau = \frac{m\,c}{h\,S}$ on tire :

$$h = \frac{m_{pierre}\,c_{pierre}}{\tau\,S_{pierre}} = \frac{1{,}6 \times 10^{-2} \times 1{,}0 \times 10^{3}}{226 \times 5{,}5 \times 10^{-3}}$$

$$\boxed{h = 13 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}}$$

Commentaire : cette valeur est dans l'intervalle « avec courant d'air » (de 10 à 500), tout près de sa borne inférieure. La pierre, posée au sol en extérieur, a été refroidie par un léger courant d'air : le résultat est cohérent avec les conditions de l'expérience.

COMPRENDRE

La valeur trouvée est proche de la limite entre les deux lignes du tableau : avec l'incertitude de lecture sur τ, on conclut à un air presque calme, pas à un vent fort.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{1.6 \times 10^{-2} \times 1.0 \times 10^{3}}{225.8064516 \times 5.5 \times 10^{-3}} \approx 12.88312$