Exercice 1 – Étude d'une éruption volcanique (11 points)

Une éruption volcanique projette dans l'atmosphère des gaz, des fluides et des roches dont l'analyse renseigne sur les caractéristiques du volcan. Cet exercice s'intéresse aux propriétés physiques de certaines de ces projections.

1. Modèle physique du mouvement d'un pyroclaste

Dans cette partie, on étudie le mouvement d'un fragment de roche magmatique solidifiée, appelé pyroclaste, projeté lors d'une éruption volcanique filmée sur le mont Aso au Japon, volcan qui a récemment connu plusieurs éruptions.

Données :

- intensité de la pesanteur terrestre : $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$;
- masse du pyroclaste étudié : $m = 3{,}4\ \text{kg}$.

L'allure de la trajectoire du pyroclaste étudié, assimilé à un point matériel, est représentée sur la figure 1 ci-dessous. L'étude du mouvement du pyroclaste est menée dans le référentiel terrestre supposé galiléen, muni d'un repère d'origine O située à la sortie du cratère, d'axe horizontal (Ox) de vecteur unitaire $\vec{i}$ et d'axe vertical (Oy) de vecteur unitaire $\vec{j}$ orienté vers le haut. À la date $t = 0$, le vecteur vitesse du pyroclaste, noté $\vec{v_0}$, forme un angle α avec l'axe horizontal (Ox). L'origine de l'énergie potentielle de pesanteur est choisie pour $y = 0$.

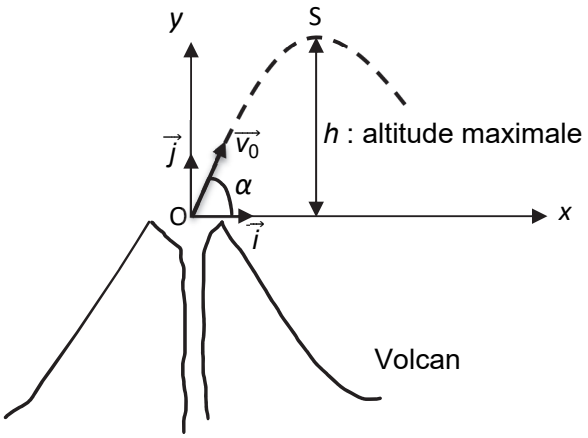


Figure 1. Représentation, sans souci d'échelle, de l'éjection du pyroclaste étudié lors d'une éruption volcanique

On se place dans le cadre d'un modèle de chute libre, sans frottement.

Q1. Dans le cadre de ce modèle, écrire la relation entre l'énergie mécanique du système au point O et celle au point S, sommet de la trajectoire.

Q2. Montrer que l'altitude maximale h atteinte par le pyroclaste s'écrit :

$$h = \frac{v_0^2 - v_S^2}{2 \cdot g}$$

où v_0 désigne la vitesse initiale du pyroclaste et v_S, sa vitesse au sommet de la trajectoire.

Afin d'effectuer un suivi des trajectoires des pyroclastes éjectés lors d'une explosion, une équipe de chercheurs a filmé le cratère du volcan en activité. Une photographie de cet événement explosif est donnée sur la figure 2 ci-dessous.

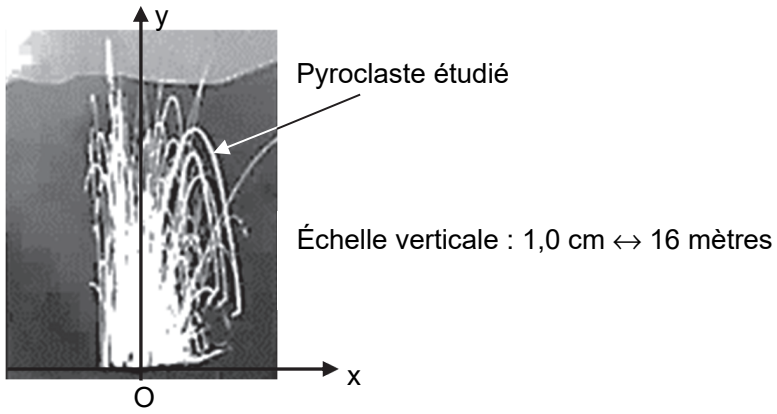


Figure 2. Photographie d'un événement explosif étudié en haut du mont Aso au Japon le 25 Avril 2015

D'après Transport of ballistic projectiles during the 2015 Aso Strombolian eruptions, Kae Tsunematsu et al.

On présente sur la figure 3 ci-dessous l'évolution temporelle des coordonnées v_x et v_y du vecteur vitesse d'un pyroclaste éjecté par le mont Aso, obtenue par pointage vidéo. Sur ce graphique, on modélise ces évolutions et on donne l'équation de la relation entre la coordonnée v_y et le temps t.

On rappelle que la valeur de la vitesse v s'exprime à partir des coordonnées $(v_x ; v_y)$ du vecteur vitesse par la relation :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

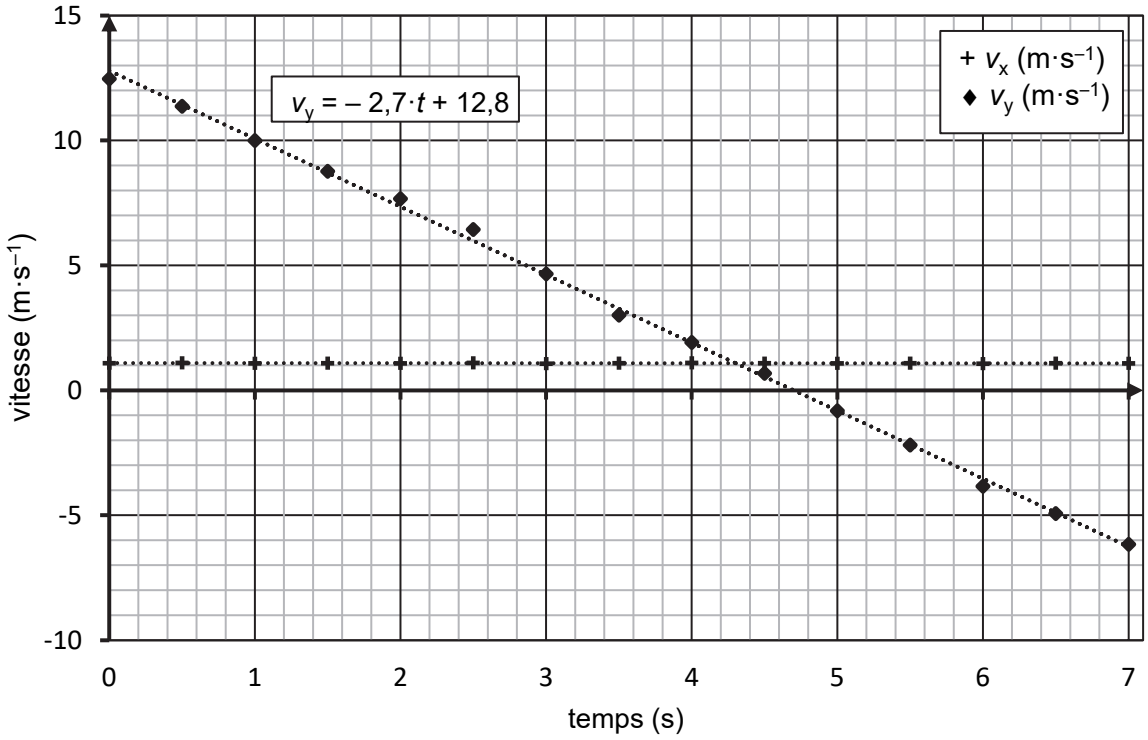


Figure 3. Évolution des coordonnées v_x et v_y du pyroclaste étudié lors de son mouvement

Q3. Déterminer, à l'aide de la figure 3, la valeur de la vitesse initiale v_0.

Q4. Montrer, à l'aide de la figure 3, que la valeur de la vitesse au sommet de la trajectoire est voisine de 1 m·s^{-1}.

Q5. En déduire la valeur de l'altitude maximale h atteinte par le pyroclaste projeté par le mont Aso, dans le cadre du modèle de la chute libre sans frottement.

Q6. En exploitant la photographie de la figure 2 et l'échelle associée, indiquer si l'altitude maximale du pyroclaste est compatible avec le modèle précédent.

En réalité, les gaz éjectés avec le pyroclaste exercent sur celui-ci une force de poussée verticale dirigée vers le haut, notée $\overrightarrow{F}$. On suppose cette force constante et identique en tout point ; sa valeur est notée F.

Q7. Déterminer les expressions des coordonnées a_x et a_y du vecteur accélération $\vec{a}$ du pyroclaste, dans le repère (Ox ; Oy), en fonction de g, m et F.

Q8. Montrer que les expressions des coordonnées $v_x(t)$ et $v_y(t)$ du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ du pyroclaste, dans le repère (Ox ; Oy) peuvent s'écrire :

$$v_x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha$$
$$v_y(t) = \left(\frac{F}{m} - g\right) \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha$$

Q9. Justifier alors, à l'aide de la figure 3, que le modèle adopté est correct et montrer que la valeur F de la force de poussée est voisine de 24 N.

2. Accélération des gaz éjectés

Dans cette partie, on souhaite expliquer le mouvement ascendant des gaz éjectés avec le pyroclaste au sommet du mont Aso, en prenant en compte la poussée d'Archimède exercée par l'air ambiant sur les gaz chauds.

Données :

- équation d'état du gaz parfait appliqué à un système de volume V, de pression P, de température T et de quantité de matière n : $PV = nRT$;
- constante des gaz parfaits : R = 8,31 J·mol^{-1}·K^{-1} ;
- intensité de la pesanteur terrestre : g = 9,8 m·s^{-2} ;
- masse volumique de l'air ambiant au sommet du mont Aso : ρ_{air} = 0,91 kg·m^{-3} ;
- données relatives aux gaz chauds au sommet du mont Aso :
  - température des gaz chauds : T = 1300 K ;
  - pression des gaz chauds : P = 8,7×10^4 Pa ;
  - masse molaire des gaz chauds : M = 22 g·mol^{-1}.

On étudie un volume de gaz chaud émis par le volcan. Pour cela on considère le système {volume de gaz chaud}, assimilé à un gaz parfait. Ce système est caractérisé par sa pression P, son volume V, sa température T, sa masse volumique ρ, sa masse m, sa quantité de matière n et sa masse molaire M.

Q10. Montrer que l'équation d'état du gaz parfait conduit à la relation : $P\,M = \rho\,R\,T$.

La poussée d'Archimède qui s'exerce sur le volume de gaz chaud est verticale ascendante et a pour expression : $\Pi = \rho_{air}\,g\,V$.

On considère que le volume de gaz chaud est seulement soumis à son poids et à la poussée d'Archimède.
On peut alors montrer que l'accélération verticale ascendante du volume de gaz chaud, notée *a,* est donnée par la relation :

$$a = g \cdot \frac{\rho_{air} - \rho}{\rho}$$

Q11. Déterminer la valeur de l'accélération ascendante du volume de gaz chaud. Commenter le résultat.

3. Estimation de la durée de refroidissement des pyroclastes éjectés

Dans cette partie, on souhaite étudier la loi de refroidissement d'un pyroclaste en deux étapes : une étude théorique permet tout d'abord d'élaborer un modèle de l'évolution de sa température, puis une vérification expérimentale du modèle établi est proposée.

Étude théorique : établissement d'un modèle

À la date $t = 0$, le pyroclaste, de masse m et de capacité thermique massique c, est à la température θ_0. Il est ensuite au contact de l'air ambiant considéré à température constante θ_{amb}.

On considère dans la suite le système {pyroclaste} simplement constitué du pyroclaste étudié.

On effectue, entre les instants t et $t + \Delta t$, le bilan d'énergie sur le système {pyroclaste}, supposé incompressible, recevant un flux thermique ϕ (en W) de la part de l'air ambiant. Pendant la durée Δt, sa température varie de $\Delta\theta$.

Q12. Exprimer, en appliquant le premier principe de la thermodynamique, la variation d'énergie interne ΔU du système pendant la durée Δt, en fonction du flux thermique ϕ. En déduire une relation entre m, c, ϕ, Δt et $\Delta\theta$.

Le flux thermique ϕ reçu par le pyroclaste de surface S (en m^2) à la température $\theta(t)$ de la part de l'air ambiant à la température θ_{amb} est modélisé par la loi de Newton :

$$\phi = h \cdot S \cdot (\theta_{amb} - \theta(t))$$

où h est le coefficient d'échange thermique surfacique exprimé en $W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}$.

La durée Δt est supposée faible devant une durée caractéristique d'évolution de la température du système.

Q13. Montrer alors que l'équation différentielle vérifiée par la température $\theta(t)$ du système peut s'écrire :

$$\frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{\theta(t)}{\tau} = \frac{\theta_{amb}}{\tau} \qquad \text{avec } \tau = \frac{m \cdot c}{h \cdot S}$$

Q14. Montrer que la grandeur $\frac{m \cdot c}{h \cdot S}$ est homogène à un temps.

L'équation différentielle précédente admet des solutions de forme générale :

$$\theta(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + B \qquad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes.}$$

Q15. Exprimer $\theta(0)$ et la limite θ_{lim} de $\theta(t)$ lorsque $t \to +\infty$ en fonction de A et B. En déduire les expressions littérales des constantes A et B en fonction de θ_0 et θ_{amb}.

On admet que l'expression précédente permet d'aboutir à la relation ci-dessous qui sera utilisée pour la suite de l'exercice :

$$\ln(\theta(t) - \theta_{amb}) = K - \frac{t}{\tau} \qquad \text{où K est une constante.}$$

Vérification expérimentale du modèle établi

Afin de vérifier le modèle établi lors de l'étude théorique sur un système analogue au pyroclaste, on étudie une pierre ponce (roche volcanique) chauffée au barbecue pendant une dizaine de minutes. La pierre ponce est ensuite posée au sol et exposée à l'air ambiant. On étudie alors l'évolution temporelle de sa température. Les résultats de cette expérience sont présentés sur la figure 4.

Données :

- surface de la pierre ponce exposée à l'air : $S_{pierre} = 5{,}5\times10^{-3}$ m^2 ;
- masse de la pierre ponce : $m_{pierre} = 1{,}6\times10^{-2}$ kg ;
- capacité thermique massique de la pierre ponce : $c_{pierre} = 1{,}0\times10^{3}$ J·kg^{-1}·K^{-1}.

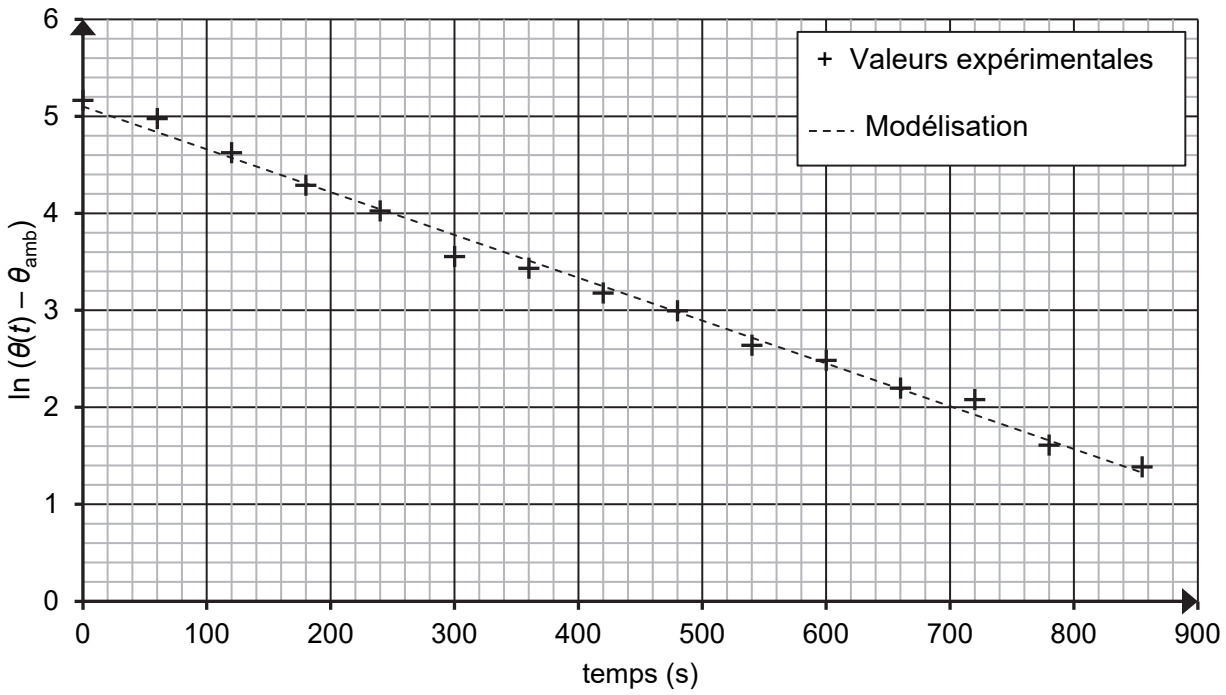


Figure 4. Évolution temporelle de $\ln(\theta(t) - \theta_{amb})$

Q16. Déterminer la valeur de la constante de temps τ.

Q17. En déduire la valeur du coefficient h d'échange thermique surfacique entre la pierre ponce et l'air ambiant. Commenter le résultat obtenu en s'appuyant sur les valeurs données dans le tableau ci-dessous.

Conditions expérimentales	Valeur du coefficient h d'échange thermique surfacique entre l'air et une paroi solide en W·K^{-1}·m^{-2}
Sans courant d'air	De 5 à 10
Avec courant d'air	De 10 à 500

D'après le cours de P-Y Lagrée : « coefficients d'échange, Ailettes »