Mission Rosetta

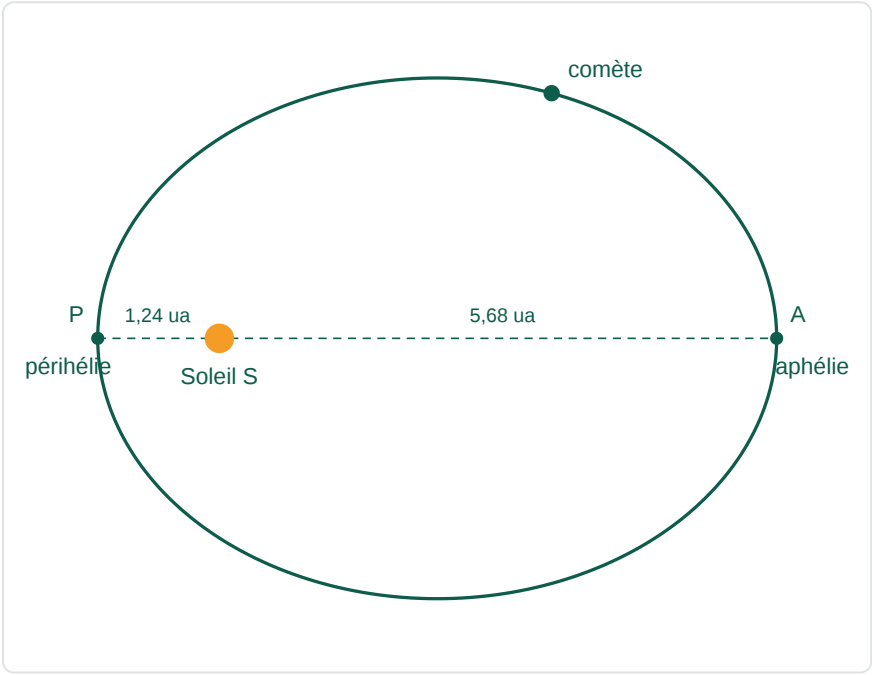
Bac S 2019 Polynésie (ancien programme) · Exercice 1 **10 points** **Durée conseillée 1 h 30**

1.1 Représenter la trajectoire de la comète autour du Soleil en plaçant le Soleil, l'aphélie et le périhélie.

Dans le référentiel héliocentrique, la comète décrit une ellipse dont l'un des foyers est le Soleil (première loi de Kepler). Le périhélie P et l'aphélie A sont les deux extrémités du grand axe : P du côté du Soleil, A à l'opposé.

Schéma ci-dessous : $SP = 1{,}24$ ua, $SA = 5{,}68$ ua, grand axe $PA = 2a$.

PIÈGE
Placer le Soleil au centre de l'ellipse. Il est sur le grand axe, décalé vers le périhélie, nettement ici puisque SA vaut plus de quatre fois SP.



1.1 · Orbite de la comète 67P autour du Soleil (distances à l'échelle)

1.2 Expliquer, à l'aide d'une loi de Kepler illustrée sur le schéma, pourquoi la vitesse de la comète n'est pas constante. Indiquer, en justifiant, la position où la vitesse est la plus grande.

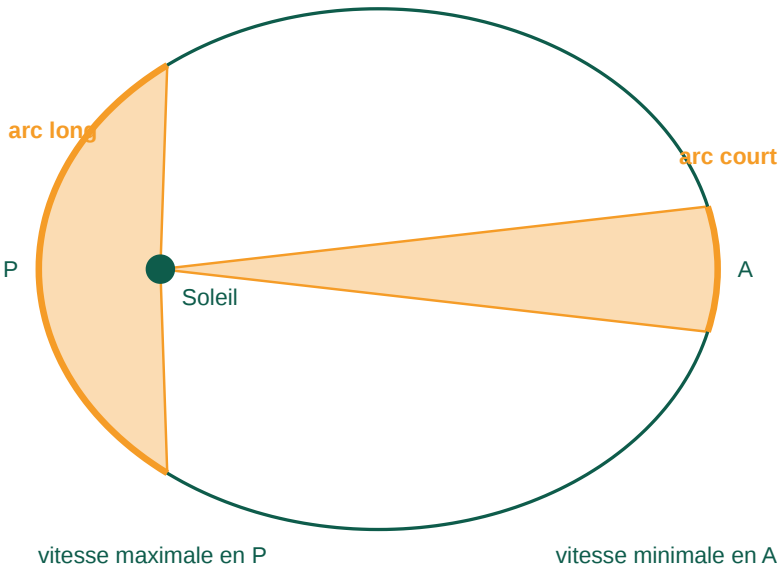
Deuxième loi de Kepler (loi des aires) : le segment [Soleil-comète] balaie des aires égales pendant des durées égales.

Sur le schéma, les deux aires colorées sont égales, donc balayées pendant la même durée Δt. Près du Soleil, le segment est court : l'arc parcouru L_P doit être long. Loin du Soleil, le segment est long : l'arc L_A est court.

Comme $L_P > L_A$ pour la même durée, $\dfrac{L_P}{\Delta t} > \dfrac{L_A}{\Delta t}$: la vitesse change le long de l'orbite.

La vitesse n'est pas constante ; elle est maximale au **périhélie** P (environ $35\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$) et minimale à l'aphélie.

COMPRENDRE
Sur une orbite circulaire, le segment garde la même longueur : des aires égales donnent des arcs égaux et le mouvement est uniforme. C'est l'ellipse qui impose une vitesse variable.



1.2 · Loi des aires : les deux aires orange sont égales et balayées pendant la même durée

1.3 À partir de la troisième loi de Kepler $\frac{T^2}{a^3} = k$, déterminer la période de révolution de la comète autour du Soleil, en années.

Données utiles périhélie : $1{,}24$ ua ; aphélie : $5{,}68$ ua ; Terre : $T_T = 1$ an, $a_T = 1$ ua

Le grand axe est la distance périhélie-aphélie : $2a = 1{,}24 + 5{,}68$, donc $a = 3{,}46$ ua.

La constante k est la même pour la Terre et pour la comète :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_T^2}{a_T^3} \quad \text{donc} \quad T = T_T\sqrt{\frac{a^3}{a_T^3}}$$

Avec $T_T = 1$ an et $a_T = 1$ ua (orbite terrestre quasi circulaire) :

$$T = 1 \times \sqrt{\frac{3{,}46^3}{1^3}} = 6{,}44 \text{ ans}$$

$T = 6{,}44$ ans

PIÈGE
Prendre $a = 5{,}68$ ua ou $a = 6{,}92$ ua. Le demi-grand axe est la moitié de la distance périhélie-aphélie.

COMPRENDRE
Chiffres significatifs : les distances sont données avec trois chiffres, le résultat en garde trois.

MÉTHODE
Sans la valeur de k, on compare à un astre connu tournant autour du même centre. En gardant les années et les unités astronomiques, $k = 1\ \text{an}^2 \cdot \text{ua}^{-3}$: aucune conversion n'est nécessaire.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{1.24 + 5.68}{2}$ ≈ 3.46

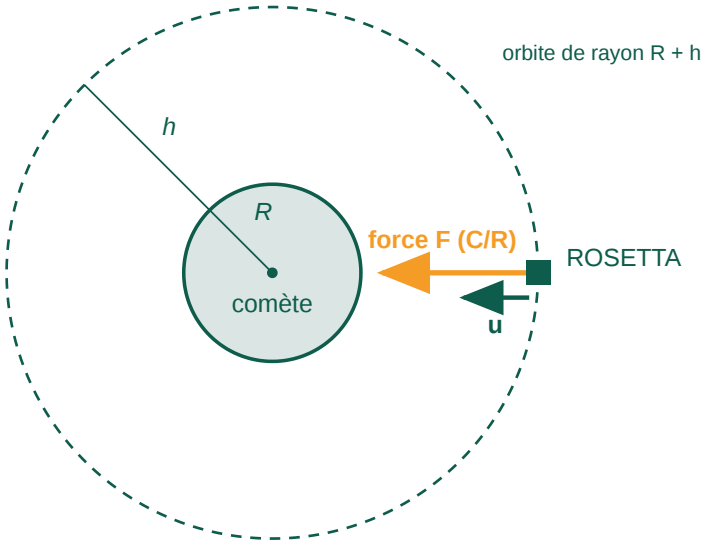
$\sqrt{3.46^3}$ ≈ 6.435972

2.1 Schématiser ROSETTA en orbite autour de la comète avec le vecteur unitaire $\vec{u}$ et la force gravitationnelle exercée par la comète, puis donner l'expression vectorielle de cette force en fonction de G, M, M_C, h, R et $\vec{u}$.

La distance entre le centre de la comète et ROSETTA est $R + h$. La force est attractive : elle est dirigée de ROSETTA vers le centre de la comète, dans le sens de $\vec{u}$.

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{C/R} = G\,\frac{M\,M_C}{(R+h)^2}\,\vec{u}}$$

PIÈGE
Écrire h^2 au dénominateur : la distance se compte depuis le centre de la comète. Aucun signe « $-$ » ici, puisque $\vec{u}$ pointe déjà vers la comète.



2.1 · ROSETTA en orbite circulaire autour de la comète (schéma sans échelle)

2.2.1 En identifiant le poids de ROSETTA à la force gravitationnelle, donner l'expression vectorielle de l'intensité de la pesanteur $\vec{g}$ au voisinage de la comète.

Le poids s'écrit $\overrightarrow{P} = M\,\vec{g}$. L'égalité $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{F}_{C/R}$ donne :

$$M\,\vec{g} = G\,\frac{M\,M_C}{(R+h)^2}\,\vec{u}$$

On simplifie par M :

$$\boxed{\vec{g} = G\,\frac{M_C}{(R+h)^2}\,\vec{u}}$$

COMPRENDRE
$\vec{g}$ ne dépend pas de la masse de l'objet, seulement de l'astre attracteur et de la distance à son centre. Il diminue quand l'altitude augmente.

2.2.2 ROSETTA n'étant soumise qu'à l'attraction de la comète, établir l'expression vectorielle de son accélération $\vec{a}_R$.

Système {ROSETTA}, de masse M constante ; référentiel centré sur la comète, supposé galiléen ; seule force : $\overrightarrow{F}_{C/R}$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} = M\,\vec{a}_R$, soit

$$G\,\frac{M\,M_C}{(R+h)^2}\,\vec{u} = M\,\vec{a}_R$$

$$\boxed{\vec{a}_R = G\,\frac{M_C}{(R+h)^2}\,\vec{u}}$$

COMPRENDRE
On retrouve $\vec{a}_R = \vec{g}$: un objet soumis à la seule gravitation a pour accélération le champ de pesanteur local.

MÉTHODE
Toujours annoncer système, référentiel et bilan des forces avant d'écrire la deuxième loi de Newton : ces trois éléments sont notés.

2.3.1 Montrer que, pour un mouvement circulaire, la valeur de la vitesse de ROSETTA est $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_C}{R+h}}$.

D'après 2.2.2, $\vec{a}_R$ est dirigée selon $\vec{u}$, vers le centre de la trajectoire : l'accélération n'a pas de composante tangentielle, donc $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ et le mouvement circulaire est uniforme.

Pour un mouvement circulaire uniforme de rayon $R+h$, l'accélération est centripète et vaut $a_R = \dfrac{v^2}{R+h}$.

En égalant les deux expressions de a_R :

$$\frac{v^2}{R+h} = \frac{G\,M_C}{(R+h)^2} \quad \text{donc} \quad v^2 = \frac{G\,M_C}{R+h}$$

$v = \sqrt{\dfrac{G\,M_C}{R+h}}$, expression attendue.

PIÈGE

Utiliser $a = \dfrac{v^2}{r}$ sans dire d'où vient cette relation. Il faut citer le caractère centripète de l'accélération dans un mouvement circulaire uniforme.

2.3.2 Calculer la valeur v de la vitesse.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$; $M_C = 1{,}0 \times 10^{13}$ kg ; $R = 2{,}0$ km ; $h = 20$ km

$R + h = 2{,}0 \times 10^3 + 20 \times 10^3 = 22 \times 10^3$ m.

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}0 \times 10^{13}}{22 \times 10^3}} = 0{,}17\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$v = 0{,}17\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

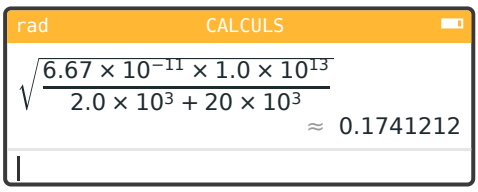
PIÈGE

Laisser R et h en kilomètres. Avec G en unités SI, les distances sont en mètres.

COMPRENDRE

Deux chiffres significatifs, comme M_C, R et h. Cette vitesse, environ $0{,}6\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, est celle que l'énoncé redonne à la question 3.2.

À LA CALCULATRICE



2.3.3 Combien de temps ROSETTA met-elle pour faire un tour complet de la comète ?

Données utiles $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_C}{R+h}}$ (2.3.1) ; $R + h = 22 \times 10^3$ m

Le mouvement est uniforme : en une période T, ROSETTA parcourt le périmètre $2\pi(R+h)$ de l'orbite à la vitesse v.

$$T = \frac{2\pi\,(R+h)}{v}$$

$$T = \frac{2\pi \times 22 \times 10^3}{0{,}174} = 7{,}9 \times 10^5\ \mathrm{s}$$

$T = 7{,}9 \times 10^5$ s, soit environ $9{,}2$ jours.

PIÈGE

Reprendre la valeur arrondie $0{,}17$: on obtient $8{,}1 \times 10^5$ s. Un calcul enchaîné utilise la valeur non arrondie gardée en mémoire.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{2\times\pi\times 22\times 10^{3}}{\sqrt{\frac{6.67\times 10^{-11}\times 1.0\times 10^{13}}{22\times 10^{3}}}} \approx 793872.9$$

$$\frac{793\,872.8922}{86\,400} \approx 9.188344$$

3.1.1 Déterminer la durée de la descente de PHILAE et sa vitesse à l'atterrissage.

Données utiles $g = 1{,}5\times 10^{-5}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; hauteur de chute $h = 20$ km ; vitesse initiale nulle

Système {PHILAE}, de masse M_P ; référentiel lié à la comète, supposé galiléen ; seule force : le poids $\vec{P} = M_P\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $M_P\,\vec{g} = M_P\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$. Sur l'axe (Oy) dirigé vers le haut : $a_y = -g$.

Par intégration, avec $v_y(0) = 0$: $\quad v_y(t) = -g\,t$

Nouvelle intégration, avec $y(0) = h$: $\quad y(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + h$

Durée. PHILAE touche le sol à la date t_f telle que $y(t_f) = 0$:

$$t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\times 20\times 10^{3}}{1{,}5\times 10^{-5}}} = 5{,}2\times 10^{4}\ \text{s}$$

Vitesse. $v_f = |v_y(t_f)| = g\,t_f = \sqrt{2\,g\,h}$

$$v_f = \sqrt{2\times 1{,}5\times 10^{-5}\times 20\times 10^{3}} = 0{,}77\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$t_f = 5{,}2\times 10^{4}$ s, soit environ 14 h ; $v_f = 0{,}77\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

PIÈGE
Oublier les conditions initiales : chaque intégration fait apparaître une constante, ici 0 pour la vitesse et h pour la position. Sans elles, l'équation horaire est fausse.

COMPRENDRE
La coordonnée v_y est négative puisque PHILAE descend alors que l'axe monte. La « vitesse » demandée est la valeur positive $|v_y|$.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\sqrt{\frac{2\times 20\times 10^{3}}{1.5\times 10^{-5}}} \approx 51639.78$$

$$\frac{51\,639.77795}{3600} \approx 14.34438$$

$$\sqrt{2\times 1.5\times 10^{-5}\times 20\times 10^{3}} \approx 0.7745967$$

3.1.2 Quelle hauteur de chute donnerait, sur Terre, la même vitesse d'impact ? Comment expliquer la différence ?

Données utiles $g_T = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $v_f = \sqrt{2\,g\,h}$ (3.1.1)

La relation $v_f = \sqrt{2\,g\,h}$ reste valable sur Terre pour une chute libre sans vitesse initiale : $v_f^2 = 2\,g_T\,h_T$. Même vitesse d'impact : $2\,g_T\,h_T = 2\,g\,h$.

$$h_T = \frac{g\,h}{g_T} = \frac{1{,}5\times10^{-5}\times20\times10^{3}}{9{,}8} = 3{,}1\times10^{-2}\ \text{m}$$

L'intensité de la pesanteur est bien plus grande sur Terre : $\frac{g_T}{g} = \frac{9{,}8}{1{,}5\times10^{-5}} \approx 6{,}5\times10^{5}$. À vitesse d'impact égale, la hauteur de chute est divisée par ce même facteur.

$h_T = 3{,}1$ cm au lieu de 20 km : la pesanteur terrestre est environ 650 000 fois plus intense que celle de la comète.

COMPRENDRE
La comète est très peu massive (10^{13} kg contre 6×10^{24} kg pour la Terre) : son attraction est minuscule. PHILAE arrive au sol à la vitesse d'un objet lâché de trois centimètres.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{1.5\times10^{-5}\times20\times10^{3}}{9.8}$ ≈ 0.03061224

$\frac{9.8}{1.5\times10^{-5}}$ ≈ 653333.3

3.1.3 La chute dure en réalité 7 h. Quelles hypothèses du modèle peut-on discuter ? Justifier.

Données utiles $t_f \approx 14$ h et $v_f = 0{,}77\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (3.1.1) ; $g = G\,\frac{M_C}{(R+h)^2}$ (2.2.1)

Le modèle prévoit 14 h, le double de la durée réelle : il n'est pas satisfaisant.

Champ de pesanteur uniforme. D'après 2.2.1, g dépend de la distance au centre : $g = 1{,}4\times10^{-6}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ à 20 km d'altitude, contre $1{,}7\times10^{-4}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ au sol. Il varie d'un facteur supérieur à 100 pendant la chute : le champ n'est pas uniforme.

Vitesse initiale nulle. Parcourir 20 km en 7 h correspond à une vitesse moyenne de $0{,}79\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, supérieure à la vitesse finale du modèle. PHILAE a donc été lâché avec une vitesse dirigée vers la comète.

Chute libre dans un référentiel galiléen. La comète n'est pas une sphère, elle tourne sur elle-même et l'attraction du Soleil est négligée.

Hypothèses discutables : champ uniforme, vitesse initiale nulle, PHILAE soumis à son seul poids dans un référentiel galiléen.

MÉTHODE
Critiquer un modèle : relire l'énoncé et relever chaque mot qui simplifie (uniforme, libre, galiléen, sans vitesse initiale), puis appuyer la critique sur un ordre de grandeur calculé.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{6.67\times10^{-11}\times1.0\times10^{13}}{(22\times10^{3})^2}$ ≈ 1.378099×10^{-6}

$\frac{6.67\times10^{-11}\times1.0\times10^{13}}{(2.0\times10^{3})^2}$ ≈ 1.6675×10^{-4}

$\frac{20\times10^{3}}{7\times3600}$ ≈ 0.7936508

3.2 Le système {ROSETTA + PHILAE}, isolé pendant le largage, a une vitesse de $0{,}17\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. PHILAE est largué avec une vitesse nulle par rapport à la comète. Déterminer la vitesse v_R de ROSETTA après le largage.

Données utiles $M = 3{,}0 \times 10^3$ kg (ROSETTA + PHILAE) ; $M_P = 1{,}0 \times 10^2$ kg ; $v = 0{,}17\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Le système {ROSETTA + PHILAE} est isolé : sa quantité de mouvement $\vec{p}$ se conserve pendant le largage, $\vec{p}_{\text{avant}} = \vec{p}_{\text{après}}$.

Avant : $\vec{p}_{\text{avant}} = M\,\vec{v}$.

Après : ROSETTA seule a pour masse $M - M_P$ et PHILAE a une vitesse nulle, donc $\vec{p}_{\text{après}} = (M - M_P)\,\vec{v}_R + M_P \times \vec{0}$.

Ainsi $M\,\vec{v} = (M - M_P)\,\vec{v}_R$: $\vec{v}_R$ garde la direction et le sens de $\vec{v}$, et en valeur

$$v_R = \frac{M\,v}{M - M_P} = \frac{3{,}0 \times 10^3 \times 0{,}17}{3{,}0 \times 10^3 - 1{,}0 \times 10^2} = 0{,}18\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\boxed{v_R = 0{,}18\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

PIÈGE

Prendre M pour la masse de ROSETTA seule. L'énoncé donne la masse de l'ensemble : après le largage, la masse de ROSETTA n'est plus que $M - M_P = 2{,}9 \times 10^3$ kg.

COMPRENDRE

La conservation de la quantité de mouvement $\vec{p} = m\,\vec{v}$ d'un système isolé appartient à l'ancien programme de Terminale S. Elle n'est plus exigible dans le programme actuel de spécialité.

COMPRENDRE

Pour que PHILAE reparte immobile, ROSETTA l'éjecte vers l'arrière ; par réaction, elle est légèrement accélérée vers l'avant.

À LA CALCULATRICE

