Spécialité : Accorder un diapason

Bac S 2019 Métropole (ancien programme) · Exercice 4 **5 points** **Durée conseillée 50 min**

1 Montrer, par une analyse dimensionnelle, que la formule (1) est homogène et qu'elle est compatible avec les mesures du tableau 1.

Données utiles $f = 0{,}16 \times \sqrt{\dfrac{E_A}{\rho_A}} \times \dfrac{d}{L^2}$; E_A en $\mathrm{kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}}$; ρ_A en $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; tableau 1

Homogénéité. Le nombre $0{,}16$ est sans unité. Unité du quotient sous la racine :

$$\frac{\mathrm{kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}}}{\mathrm{kg \cdot m^{-3}}} = \mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}$$

donc $\sqrt{\dfrac{E_A}{\rho_A}}$ s'exprime en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (c'est une vitesse). Le quotient $\dfrac{d}{L^2}$ s'exprime en $\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{m^2}} = \mathrm{m^{-1}}$.

Le second membre est donc en $\mathrm{m \cdot s^{-1} \times m^{-1}} = \mathrm{s^{-1}}$, c'est-à-dire en hertz, comme une fréquence : la formule (1) est homogène.

Compatibilité avec les mesures. Les quatre diapasons sont en aluminium et ont la même largeur d : la formule (1) s'écrit $f = k \times \dfrac{1}{L^2}$ avec $k = 0{,}16\, d \sqrt{\dfrac{E_A}{\rho_A}}$ constant. Le quotient de f par $\dfrac{1}{L^2}$ doit donc être le même pour les quatre diapasons :

- diapason 1 : $\dfrac{485}{85{,}7} = 5{,}66\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$
- diapason 2 : $\dfrac{384}{68{,}3} = 5{,}62\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$
- diapason 3 : $\dfrac{320}{56{,}5} = 5{,}66\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$
- diapason 4 : $\dfrac{256}{46{,}3} = 5{,}53\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$

Ces quatre valeurs s'écartent de moins de 2 % de leur moyenne, $5{,}62\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$.

La formule (1) est homogène ($\mathrm{s^{-1}}$ de chaque côté) et f est proportionnelle à $\dfrac{1}{L^2}$, avec $k \approx 5{,}62\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$: elle est compatible avec le tableau 1.

PIÈGE

Oublier la racine carrée : $\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}$ devient $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Répondre seulement sur l'homogénéité : la question demande aussi de confronter la formule aux mesures.

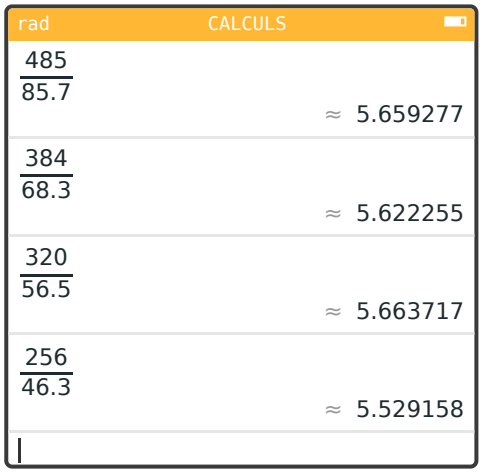
COMPRENDRE

Trois chiffres significatifs pour k, comme les valeurs du tableau. Une formule homogène n'est pas forcément juste : l'analyse dimensionnelle ne dit rien du coefficient $0{,}16$.

MÉTHODE

Tester une proportionnalité : calculer le quotient des deux grandeurs pour chaque mesure et vérifier qu'il reste constant, ou tracer f en fonction de $\dfrac{1}{L^2}$ et obtenir une droite passant par l'origine.

À LA CALCULATRICE



2 Déterminer la longueur d'onde d'un son de fréquence 440 Hz se propageant dans l'air à 25 °C. Problème : indiquer les instructions à donner à l'atelier pour que chacun des quatre diapasons émette un La3 (440 Hz) amplifié de façon optimale par une caisse de résonance, dans une salle à 25 °C.

Données utiles figure 3 ; $f = 440$ Hz ; $d = 7{,}0$ mm ; tableau 1 ; profondeur D de la caisse : multiple entier impair de $\frac{\lambda}{4}$; f proportionnelle à $\frac{d}{L^2}$ (formule (1))

Question 2. Sur la figure 3, à 25 °C, la vitesse du son dans l'air vaut $v = 346\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{346}{440} = 0{,}786\ \text{m}$$

Problème.

Caisse de résonance. Les quatre diapasons accordés émettent le même son, de longueur d'onde $\lambda = 0{,}786$ m : une même profondeur convient pour les quatre caisses. La plus petite profondeur possible est

$$D = \frac{\lambda}{4} = \frac{0{,}786}{4} = 0{,}197\ \text{m} = 19{,}7\ \text{cm}$$

La valeur suivante, $\frac{3\lambda}{4} = 59{,}0$ cm, conviendrait aussi mais donnerait une caisse inutilement encombrante.

Diapasons 2, 3 et 4. Leur fréquence est inférieure à 440 Hz : il faut l'augmenter. D'après (1), f augmente quand L diminue : on raccourcit les branches en gardant d. Pour un même diapason, $f \times L^2$ reste constant, donc $440 \times L'^2 = f \times L^2$:

$$L' = L \times \sqrt{\frac{f}{440}}$$

- diapason 2 : $L' = 0{,}121 \times \sqrt{\frac{384}{440}} = 0{,}113$ m
- diapason 3 : $L' = 0{,}133 \times \sqrt{\frac{320}{440}} = 0{,}113$ m
- diapason 4 : $L' = 0{,}147 \times \sqrt{\frac{256}{440}} = 0{,}112$ m

Diapason 1. Sa fréquence (485 Hz) est trop élevée : il faut la diminuer. On ne peut pas allonger les branches, mais on peut diminuer leur largeur. À L fixée, f est proportionnelle à d :

$$d' = d \times \frac{440}{485} = 7{,}0 \times \frac{440}{485} = 6{,}4\ \text{mm}$$

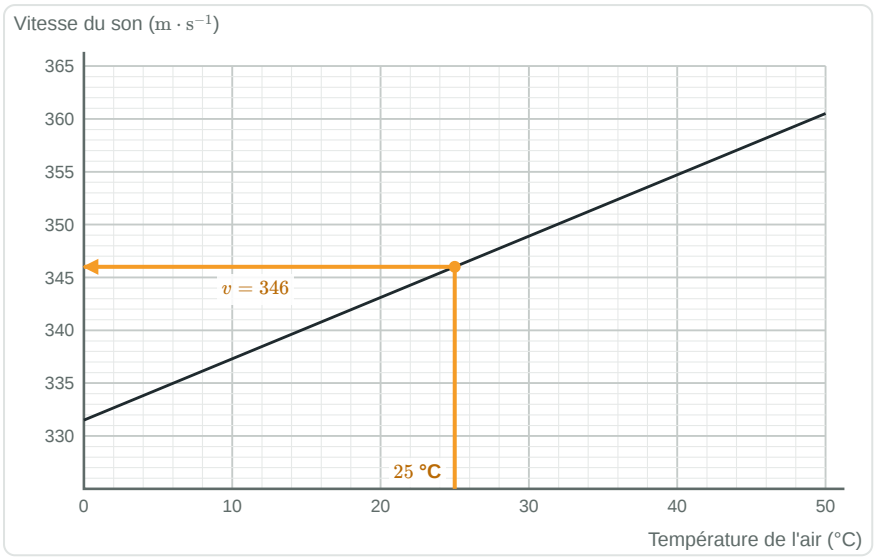
Regard critique. Les fréquences du tableau vérifient le modèle à 2 % près environ : après usinage, la fréquence de chaque diapason doit être contrôlée par un nouvel enregistrement, puis ajustée si besoin.

Instructions : diapason 1, amincir les branches jusqu'à $d' = 6{,}4$ mm ; diapasons 2 et 3, couper les branches à $L' = 11{,}3$ cm ; diapason 4, à $L' = 11{,}2$ cm ; caisses de profondeur intérieure $D = 19{,}7$ cm.

PIÈGE
Proposer de couper les branches du diapason 1 : sa fréquence augmenterait encore. Oublier la caisse de résonance, ou la calculer avec $340\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ au lieu de la vitesse lue à 25 °C.

COMPRENDRE
Sujet de l'ancien enseignement de spécialité : l'acoustique musicale et la caisse de résonance ne figurent plus au programme actuel. La relation $\lambda = \frac{v}{f}$ et l'analyse d'unités restent exigibles.

MÉTHODE
Raisonner par proportionnalité sur chaque diapason évite de calculer $\sqrt{E_A/\rho_A}$: le coefficient $0{,}16$, connu avec deux chiffres seulement, disparaît du calcul et les longueurs gardent trois chiffres significatifs.



2 · Figure 3 du sujet, avec la lecture de la vitesse du son à 25 °C

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{346}{440} \approx 0.7863636$

$\frac{346}{4 \times 440} \approx 0.1965909$

$0.121 \times \sqrt{\frac{384}{440}} \approx 0.113038$

$0.133 \times \sqrt{\frac{320}{440}} \approx 0.1134228$

$0.147 \times \sqrt{\frac{256}{440}} \approx 0.1121272$

$\frac{7.0 \times 440}{485} \approx 6.350515$