Saut à ski aux jeux olympiques d'hiver 2018

Bac S 2019 Liban (ancien programme) · Exercice 2 **5 points** **Durée conseillée 50 min**

1.1 Calculer la valeur de l'énergie mécanique E_{mD} du système au point D.

Données utiles $m = 70$ kg ; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $y_D = 98$ m ; $v_D = 0$; $E_{pp} = 0$ en $y = 0$

$E_{mD} = E_{cD} + E_{ppD} = \dfrac{1}{2} m v_D^2 + m g y_D$

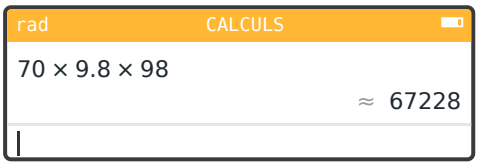
Le skieur part sans vitesse ($v_D = 0$), donc $E_{mD} = m g y_D$.

$E_{mD} = 70 \times 9{,}8 \times 98$

$\boxed{E_{mD} = 6{,}7 \times 10^4 \text{ J}}$

COMPRENDRE
Les données m, g et y_D ont deux chiffres significatifs : le résultat aussi. On écrit $6{,}7 \times 10^4$ J, pas $67\,228$ J.

À LA CALCULATRICE



1.2 Exprimer l'énergie mécanique E_{mT} du système au point T en fonction de m, g, y_T et v_T.

$E_{mT} = E_{cT} + E_{ppT}$

$\boxed{E_{mT} = \dfrac{1}{2} m v_T^2 + m g y_T}$

PIÈGE
Oublier le terme $m g y_T$: le point T est à 65 m d'altitude et la référence de l'énergie potentielle est en $y = 0$, pas en T.

1.3 Par une approche énergétique, montrer que $v_T = \sqrt{2g(y_D - y_T)}$, puis calculer sa valeur.

Données utiles $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $y_D = 98$ m ; $y_T = 65$ m

Les frottements sont négligés : l'énergie mécanique du système se conserve entre D et T.

$E_{mD} = E_{mT}$, soit $m g y_D = \dfrac{1}{2} m v_T^2 + m g y_T$

En simplifiant par m : $\dfrac{1}{2} v_T^2 = g y_D - g y_T$, donc $v_T^2 = 2g(y_D - y_T)$ et

$$v_T = \sqrt{2g(y_D - y_T)}$$

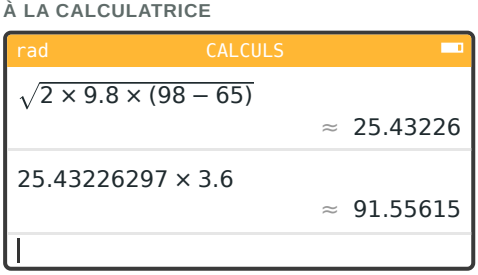
$v_T = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times (98 - 65)} = 25\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

$\boxed{v_T = 25\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\text{, soit environ } 92\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}}$

PIÈGE
Convertir la valeur arrondie : $25 \times 3{,}6 = 90\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Il faut garder la valeur non arrondie de la calculatrice avant de multiplier par 3,6.

MÉTHODE
Sans frottement : 1) écrire E_m aux deux points ; 2) égaler ; 3) isoler la vitesse. La masse se simplifie toujours : la vitesse ne dépend que du dénivelé.

À LA CALCULATRICE



1.4 La vitesse de décollage calculée est-elle en accord avec la valeur mesurée le jour de l'épreuve ? Commenter.

Données utiles v_T calculée $= 92\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ (1.3) ; v_T mesurée $= 83{,}3\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

Les deux valeurs sont du même ordre de grandeur, mais la vitesse calculée dépasse la vitesse mesurée :

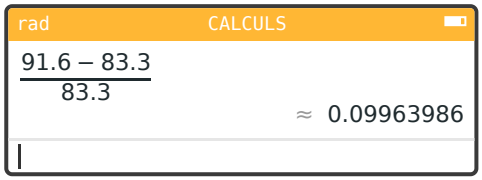
$\dfrac{91{,}6 - 83{,}3}{83{,}3} \approx 0{,}10$, soit un écart d'environ 10 %.

L'écart va dans le sens attendu : le modèle néglige les frottements (neige sur les skis, air). En réalité, ils dissipent une partie de l'énergie mécanique pendant la descente, donc le skieur arrive en T moins vite que prévu.

Accord seulement approximatif : le modèle sans frottement surestime v_T d'environ 10 %.

COMPRENDRE
Un modèle sans frottement ne peut que surestimer la vitesse. Une vitesse mesurée supérieure à la valeur calculée aurait signalé une erreur.

À LA CALCULATRICE



2.1 En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer les coordonnées du vecteur accélération lors du saut.

Système {skieur + équipement}, point matériel M de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen ; repère $(T, \vec{i}, \vec{j})$.

Seule force : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$ (frottements négligés).

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical, vers le bas, et l'axe (Ty) est orienté vers le haut :

$a_x = 0$ et $a_y = -g$

PIÈGE
Écrire $a_y = +g$. Le signe dépend de l'orientation de l'axe vertical : ici $\vec{j}$ pointe vers le haut, à l'opposé de $\vec{g}$.

2.2 Montrer, en détaillant chaque étape, que les équations horaires s'écrivent $x(t) = v_T \cos\alpha\ t$ et $y(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 - v_T \sin\alpha\ t$.

Vitesse. Comme $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives de $a_x = 0$ et $a_y = -g$:

$v_x(t) = C_1$ et $v_y(t) = -g\,t + C_2$.

À $t = 0$, le vecteur vitesse $\vec{v}_T$ est dirigé vers le bas, à l'angle α sous l'horizontale : $v_x(0) = v_T \cos\alpha$ et $v_y(0) = -v_T \sin\alpha$. Donc $C_1 = v_T \cos\alpha$ et $C_2 = -v_T \sin\alpha$:

$v_x(t) = v_T \cos\alpha$ et $v_y(t) = -g\,t - v_T \sin\alpha$.

Position. Comme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{TM}}{\mathrm{d}t}$, on prend de nouveau les primitives :

$x(t) = v_T \cos\alpha\ t + C_3$ et $y(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 - v_T \sin\alpha\ t + C_4$.

À $t = 0$, M est en T, origine du repère : $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$, donc $C_3 = C_4 = 0$.

$x(t) = v_T \cos\alpha\ t$ et $y(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 - v_T \sin\alpha\ t$

PIÈGE
Recopier par habitude $v_y(0) = +v_T \sin\alpha$. Ici la table d'envol descend : la vitesse initiale pointe sous l'horizontale, sa coordonnée verticale est négative.

MÉTHODE
Deux intégrations successives, et à chaque fois une constante fixée par les conditions initiales : la vitesse initiale pour $\vec{v}$, la position initiale pour $\overrightarrow{TM}$.

2.3 En déduire que l'équation de la trajectoire s'écrit $y(x) = -9{,}5 \times 10^{-3}\,x^2 - 1{,}9 \times 10^{-1}\,x$, avec x et y en mètres.

Données utiles $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $\alpha = 11^\circ$; $v_T = 83{,}3\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ (valeur mesurée)

On élimine le temps : $x = v_T \cos\alpha\ t$ donne $t = \dfrac{x}{v_T \cos\alpha}$.

On remplace dans $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{(v_T\cos\alpha)^2} - v_T \sin\alpha\,\frac{x}{v_T\cos\alpha}$$

$$y(x) = -\frac{g}{2\,(v_T\cos\alpha)^2}\,x^2 - \tan\alpha\ x$$

Avec $v_T = \dfrac{83{,}3}{3{,}6} = 23{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$:

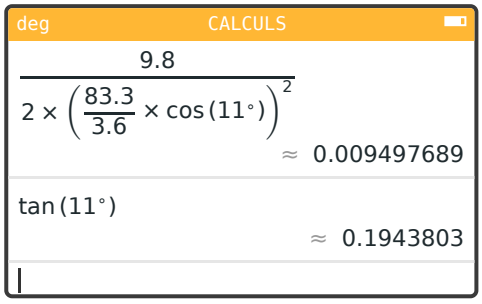
$$\frac{g}{2\,(v_T\cos\alpha)^2} = \frac{9{,}8}{2\times\left(\dfrac{83{,}3}{3{,}6}\times\cos 11^\circ\right)^2} = 9{,}5\times10^{-3}\ \text{m}^{-1}$$ et $\tan 11^\circ = 0{,}19$

$y(x) = -9{,}5 \times 10^{-3}\,x^2 - 1{,}9 \times 10^{-1}\,x$: c'est bien l'équation attendue.

PIÈGE

Laisser v_T en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, ou prendre les $25\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ calculés en 1.3 : les coefficients de l'énoncé s'obtiennent avec la vitesse mesurée, convertie en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Calculatrice en mode degrés.

À LA CALCULATRICE



2.4 Le saut réel mesure $TL = 113$ m, le point d'atterrissage L ayant une abscisse réelle de 97 m. Le modèle précédent rend-il compte de cette abscisse ? Commenter.

Données utiles piste : $y_{\text{piste}}(x) = -0{,}59\,x$; trajectoire : $y(x) = -9{,}5 \times 10^{-3}\,x^2 - 1{,}9 \times 10^{-1}\,x$ (2.3)

Dans le modèle, le skieur atterrit au point où sa trajectoire rencontre la piste : $y(x_L) = y_{\text{piste}}(x_L)$.

$-9{,}5 \times 10^{-3}\,x_L^2 - 0{,}19\,x_L = -0{,}59\,x_L$

$9{,}5 \times 10^{-3}\,x_L^2 - 0{,}40\,x_L = 0$, soit $x_L\,(9{,}5 \times 10^{-3}\,x_L - 0{,}40) = 0$

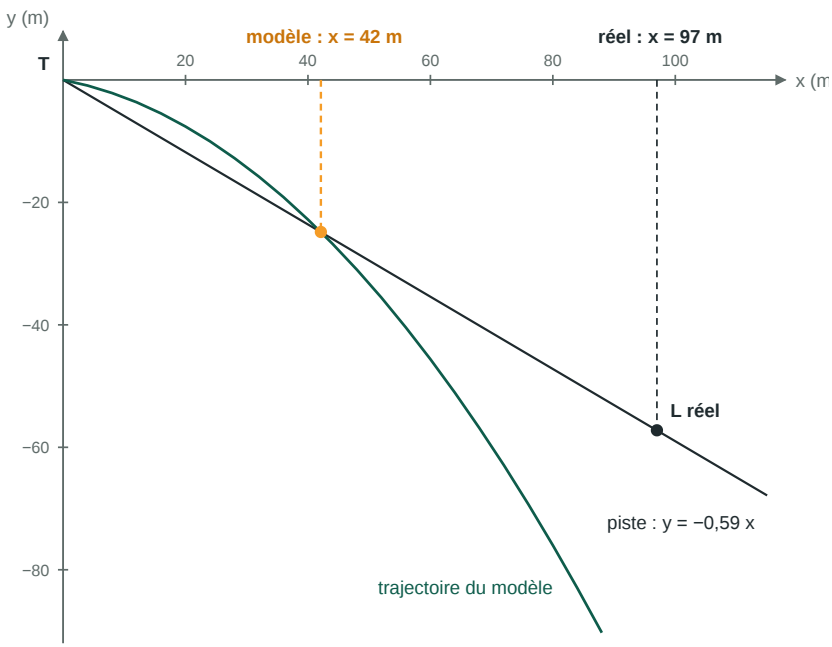
La solution $x_L = 0$ correspond au point de départ T. L'autre solution est :

$$x_L = \frac{0{,}59 - 0{,}19}{9{,}5 \times 10^{-3}} = 42 \text{ m}$$

Le modèle prévoit un atterrissage à 42 m, moins de la moitié de l'abscisse réelle (97 m) : il ne rend pas compte du saut.

Le modèle ne prend en compte que le poids. Or l'action de l'air n'est pas négligeable : penché sur ses skis écartés, le sauteur est porté par l'air, d'autant plus que le vent était important ce jour-là. Il plane et retombe bien plus loin qu'en chute libre.

Modèle : $x_L = 42$ m ; réalité : $x_L = 97$ m. Le modèle de la chute libre ne convient pas pour le saut.



2.4 · Trajectoire du modèle et piste : point d'atterrissage prévu et point réel

COMPRENDRE

Les données réelles sont cohérentes avec la piste modélisée : pour $x = 97$ m, $y = -0{,}59 \times 97 = -57$ m et $TL = \sqrt{97^2 + 57^2} \approx 113$ m. C'est donc la trajectoire qui est mal décrite, pas la piste.

MÉTHODE

Point de rencontre de deux courbes : égaler les deux expressions de y, tout ramener dans un membre, puis factoriser par x. Ne pas diviser par x sans dire que $x = 0$ est le point de départ.

À LA CALCULATRICE

