Les accélérateurs montent en puissance

Bac S 2020 Polynésie (ancien programme) · Exercice 2 **6 points** **Durée conseillée 1 h 05**

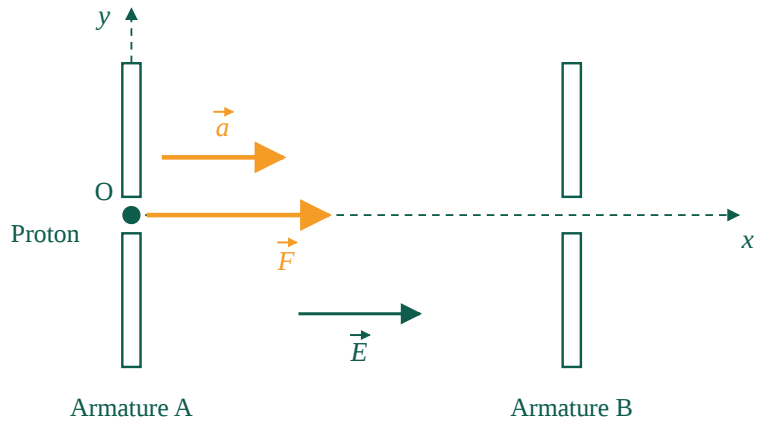
1.1 Représenter sur l'annexe, sans souci d'échelle, la force électrique $\vec{F}$ appliquée au proton et son vecteur accélération $\vec{a}$. Justifier.

Le proton porte la charge $q = e > 0$: $\vec{F} = e\,\vec{E}$. La force a donc la direction et le sens de $\vec{E}$, de l'armature A vers l'armature B.

Système {proton}, référentiel terrestre supposé galiléen, poids négligé. Deuxième loi de Newton : $\vec{F} = m_p\,\vec{a}$. Comme $m_p > 0$, $\vec{a}$ a la direction et le sens de $\vec{F}$.

$\vec{F}$ et $\vec{a}$ sont tracés à partir du proton, parallèles à (Ox), dans le sens de $\vec{E}$.

PIÈGE
Tracer les vecteurs sans phrase : « Justifier » demande les deux relations $\vec{F} = e\,\vec{E}$ et $\vec{F} = m_p\,\vec{a}$, avec le signe de la charge.



1.1 · Annexe complétée : la force et l'accélération ont la direction et le sens du champ (l'accélération est décalée vers le haut pour la lisibilité)

1.2.1 Établir l'expression du vecteur accélération dans le repère (O, x, y), puis : a) montrer que $v_x(t) = \dfrac{e\,E}{m_p}\,t + v_0$; b) déterminer $v_y(t)$ et justifier le nom d'« accélérateur linéaire ».

D'après 1.1 : $\vec{a} = \dfrac{e\,\vec{E}}{m_p}$. Le champ $\vec{E}$ est dirigé selon (Ox), donc :

$$a_x = \frac{e\,E}{m_p} \qquad a_y = 0$$

a) $a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$, donc par intégration $v_x(t) = \dfrac{e\,E}{m_p}\,t + C_1$. À $t = 0$, $v_x(0) = v_0$, d'où $C_1 = v_0$.

b) $a_y = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = 0$, donc $v_y(t) = C_2$. À $t = 0$, la vitesse est selon (Ox) : $v_y(0) = 0$, d'où $C_2 = 0$.

La vitesse reste parallèle à (Ox) à chaque instant : la trajectoire du proton est rectiligne, ce qui explique le qualificatif « linéaire ».

$v_x(t) = \dfrac{e\,E}{m_p}\,t + v_0$ et $v_y(t) = 0$: la trajectoire est une droite, l'axe (Ox).

MÉTHODE
Pour passer de l'accélération à la vitesse : projeter, intégrer chaque coordonnée, puis fixer la constante avec la vitesse initiale. Une constante oubliée fait disparaître v_0.

1.2.2 Le proton atteint l'armature B à la date t_1. Quelle est alors sa vitesse v_1 ?

Données utiles $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C ; $E = 10{,}0\ \text{kV} \cdot \text{m}^{-1}$; $m_p = 1{,}7 \times 10^{-27}$ kg ; $t_1 = 3{,}7 \times 10^{-7}$ s ; $v_0 = 2{,}0 \times 10^{3}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Comme $v_y = 0$, la vitesse vaut $v_1 = v_x(t_1) = \dfrac{e\,E}{m_p}\,t_1 + v_0$.

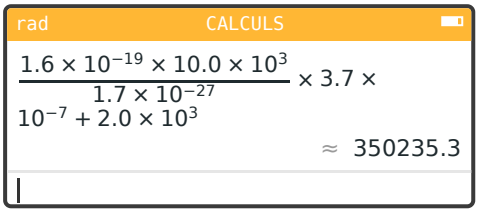
$$v_1 = \frac{1{,}6 \times 10^{-19} \times 10{,}0 \times 10^{3}}{1{,}7 \times 10^{-27}} \times 3{,}7 \times 10^{-7} + 2{,}0 \times 10^{3}$$

$$\boxed{v_1 = 3{,}5 \times 10^{5}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

PIÈGE
Laisser E en $\text{kV} \cdot \text{m}^{-1}$: il faut $10{,}0 \times 10^{3}\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$, sinon la vitesse est mille fois trop faible.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme e, m_p et t_1, les données les moins précises. On garde $3{,}502 \times 10^{5}$ en mémoire pour la suite.

À LA CALCULATRICE



1.2.3 Déterminer l'équation du second degré qui permet d'obtenir t_1. Vérifier qu'elle est cohérente avec la valeur de t_1 donnée.

Données utiles $\ell = 6{,}5$ cm ; $v_x(t)$ (1.2.1)

$v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, donc par intégration $x(t) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{e\,E}{m_p}\,t^2 + v_0\,t + C_3$. À $t = 0$ le proton est en O : $x(0) = 0$, d'où $C_3 = 0$.

Le proton atteint l'armature B quand $x(t_1) = \ell$:

$$\frac{1}{2}\,\frac{e\,E}{m_p}\,t_1^2 + v_0\,t_1 - \ell = 0$$

Avec $\dfrac{e\,E}{m_p} = 9{,}41 \times 10^{11}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $\ell = 6{,}5 \times 10^{-2}$ m :

$$4{,}7 \times 10^{11}\,t_1^2 + 2{,}0 \times 10^{3}\,t_1 - 6{,}5 \times 10^{-2} = 0$$

Discriminant : $\Delta = v_0^2 + 2\,\dfrac{e\,E}{m_p}\,\ell > 0$. La seule racine positive est

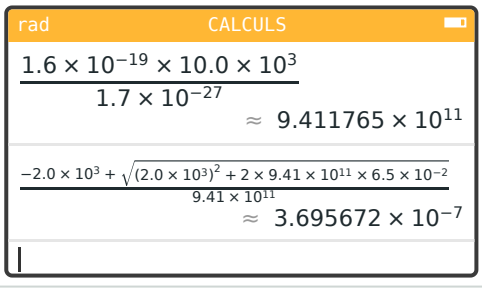
$$t_1 = \frac{-v_0 + \sqrt{\Delta}}{e\,E/m_p}$$

$\boxed{t_1 = 3{,}7 \times 10^{-7}\ \text{s}}$: l'équation redonne bien la valeur de l'énoncé.

PIÈGE
Oublier de convertir ℓ en mètres, ou garder la racine négative : une date d'arrivée est positive.

MÉTHODE
Autre vérification, plus rapide : remplacer t_1 par $3{,}7 \times 10^{-7}$ s dans $x(t)$ et constater que l'on trouve $6{,}5 \times 10^{-2}$ m, soit ℓ.

À LA CALCULATRICE



1.2.4 Calculer l'augmentation d'énergie cinétique du proton entre les armatures A et B. Comparer avec l'énergie attendue dans le LHC. Comment peut-on atteindre la valeur attendue ?

Données utiles $v_1 = 3{,}502 \times 10^5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (1.2.2, valeur non arrondie) ; $1\ \text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ J ; énergie dans le LHC : supérieure à 10^{12} eV

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m_p v_1^2 - \frac{1}{2} m_p v_0^2 = \frac{1}{2} m_p \left(v_1^2 - v_0^2\right)$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \times 1{,}7 \times 10^{-27} \times \left[\left(3{,}502 \times 10^5\right)^2 - \left(2{,}0 \times 10^3\right)^2\right]$$

$$\Delta E_c = 1{,}04 \times 10^{-16}\ \text{J} \approx 1{,}0 \times 10^{-16}\ \text{J}$$

En électronvolts : $\Delta E_c = \dfrac{1{,}04 \times 10^{-16}}{1{,}6 \times 10^{-19}} = 6{,}5 \times 10^2$ eV.

Comparaison : $\dfrac{10^{12}}{6{,}5 \times 10^2} \approx 1{,}5 \times 10^9$. L'énergie gagnée ici est plus d'un milliard de fois inférieure à celle du LHC.

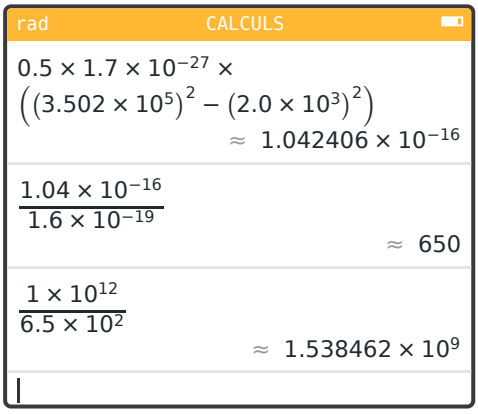
Pour s'en approcher, il faut un champ E beaucoup plus intense, une zone d'accélération plus longue, ou faire traverser au proton un très grand nombre de zones accélératrices successives.

> $\Delta E_c = 1{,}0 \times 10^{-16}\ \text{J} = 6{,}5 \times 10^2$ eV, environ 10^9 fois moins que dans le LHC.

PIÈGE
Comparer des joules à des électronvolts. Il faut la même unité des deux côtés avant de calculer le rapport.

COMPRENDRE
Le gain d'énergie est le travail de la force électrique : $e\,E\,\ell = 650$ eV. Il ne dépend que de E et de ℓ : ce sont les deux grandeurs sur lesquelles agir.

À LA CALCULATRICE



1.3.1 Ce dispositif peut-il fonctionner avec un neutron ? Justifier.

Le neutron a une charge nulle : $\vec{F} = q\,\vec{E} = \vec{0}$. Il ne subit aucune force électrique, donc son accélération est nulle et sa vitesse ne change pas.

> Non : une particule sans charge n'est pas accélérée par un champ électrique.

1.3.2 Que faudra-t-il modifier si l'on souhaite accélérer un électron ?

L'électron porte la charge $q = -e$: $\vec{F} = -e\,\vec{E}$, la force est de sens opposé au champ. Avec le champ actuel, l'électron entrant en O serait freiné.

Il faut donc inverser le sens de $\vec{E}$, c'est-à-dire permuter les signes des charges portées par les armatures A et B. La force est alors de nouveau dirigée de A vers B.

> Inverser le sens du champ $\vec{E}$ en échangeant la polarité des deux armatures.

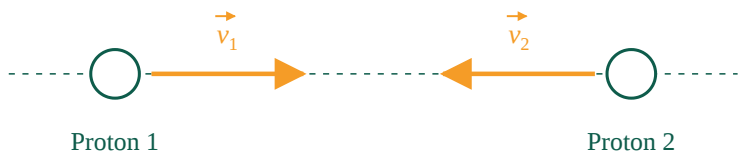
COMPRENDRE
Autre solution : garder le champ et faire entrer l'électron par l'armature B. Il est alors accéléré de B vers A.

2.1 Faire un schéma illustrant la situation avant la collision entre deux protons, en représentant leur vecteur vitesse.

Les deux protons ont la même masse et la même énergie cinétique, donc la même valeur de vitesse : $v_1 = v_2$. Le choc est frontal : ils se déplacent sur une même droite, l'un vers l'autre.

Deux vecteurs vitesse de même direction, de sens opposés et de même longueur : $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$.

PIÈGE
Tracer des flèches de longueurs différentes : la même énergie cinétique pour la même masse impose la même valeur de vitesse.



2.1 · Avant la collision : même direction, sens opposés, même longueur

2.2 Le système est l'ensemble des deux protons, dans le référentiel terrestre. Déterminer le vecteur quantité de mouvement du système avant la collision.

La quantité de mouvement du système est la somme de celles des deux protons :

$$\vec{p}_{\text{avant}} = m_p\,\vec{v}_1 + m_p\,\vec{v}_2$$

Or $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$ (2.1), donc $\vec{p}_{\text{avant}} = m_p\,\vec{v}_1 - m_p\,\vec{v}_1$.

$\vec{p}_{\text{avant}} = \vec{0}$

PIÈGE
Additionner les valeurs ($2\,m_p\,v_1$) au lieu des vecteurs. Deux vecteurs opposés de même norme ont une somme nulle.

COMPRENDRE
La quantité de mouvement $\vec{p} = m\,\vec{v}$ et sa conservation pour un système isolé relèvent de l'ancien programme de Terminale S. Elles ne figurent plus au programme actuel de la spécialité.

2.3 Le système est considéré comme isolé. Choisir, parmi les trois schémas, celui qui correspond à la situation après la collision. Justifier.

Pour un système isolé, la quantité de mouvement se conserve : $\vec{p}_{\text{après}} = \vec{p}_{\text{avant}} = \vec{0}$.

Après le choc : $m_p\,\vec{v}_1 + m_p\,\vec{v}_2 = \vec{0}$, donc $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$. Les deux vecteurs vitesse doivent être de même direction, de sens opposés et de même longueur.

- Schéma 1 : sens opposés, mais $\vec{v}_2$ est plus long que $\vec{v}_1$: la somme n'est pas nulle.
- Schéma 2 : les deux vecteurs n'ont pas la même direction : la somme n'est pas nulle.
- Schéma 3 : même direction, sens opposés, même longueur.

Le schéma n° 3 est le seul compatible avec la conservation de la quantité de mouvement.

MÉTHODE
Pour trancher entre des schémas, traduire la loi en trois critères sur les flèches (direction, sens, longueur), puis les tester un par un sur chaque schéma.