L'installation de l'Homme sur la Lune

Bac 2021 Polynésie · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 55 min**

1 Proposer une définition d'un satellite lunostationnaire en comparant sa période de révolution autour de la Lune à la période de rotation de la Lune sur elle-même.

Par analogie avec un satellite géostationnaire, un satellite lunostationnaire reste immobile pour un observateur placé à la surface de la Lune : il survole toujours le même point du sol lunaire.

Il tourne dans le plan de l'équateur lunaire, dans le même sens que la Lune.

Sa période de révolution est égale à la période de rotation de la Lune sur elle-même : $T = 27{,}3$ jours.

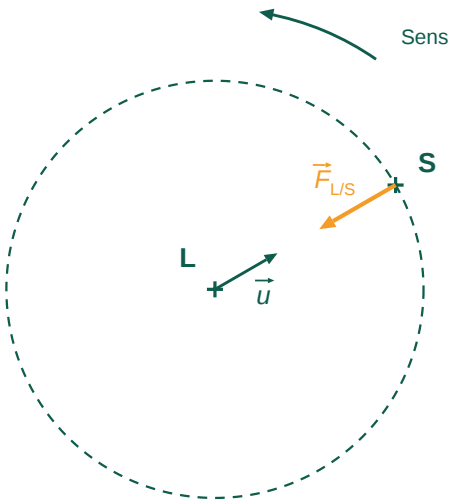
PIÈGE
Égalité des périodes seule ne suffit pas à rendre le satellite fixe : il faut aussi une orbite équatoriale parcourue dans le sens de rotation de la Lune.

2 Représenter, sans souci d'échelle, la force d'interaction gravitationnelle $\vec{F}_{L/S}$ exercée par la Lune sur le satellite (document réponse).

La force est attractive : elle s'applique au centre S du satellite, sa direction est la droite (LS) et elle est orientée de S vers L.

$\vec{F}_{L/S}$: vecteur d'origine S, porté par (SL), dirigé vers le centre L de la Lune.

PIÈGE
Dessiner la force à partir de L, ou la diriger vers l'extérieur de l'orbite. Le point d'application est l'objet qui subit la force, ici S.



2 · Document réponse : la force exercée par la Lune sur le satellite, en orange

3 Établir l'expression de la force $\vec{F}_{L/S}$ en fonction de G, M_S, M_L, d_{LS} et $\vec{u}$.

On applique la relation des données avec A = L et B = S : le vecteur unitaire $\vec{u}_{L/S}$, orienté de L vers S, est le vecteur $\vec{u}$.

$$\vec{F}_{L/S} = -G\frac{M_L\,M_S}{d_{LS}^2}\,\vec{u}$$

COMPRENDRE
Le signe « $-$ » traduit l'attraction : la force est de sens opposé à $\vec{u}$, donc dirigée de S vers L, comme sur le schéma de la question 2.

4 À l'aide de la deuxième loi de Newton, établir l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_G$ du centre du satellite en fonction de G, M_L, d_{LS} et $\vec{u}$.

Système : {satellite}, de masse M_S constante. Référentiel : lunocentrique, supposé galiléen. Bilan des forces : uniquement $\overrightarrow{F}_{L/S}$ (l'influence de la Terre est négligée).

Deuxième loi de Newton : $\sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} = M_S\,\vec{a}_G$, soit $-G\,\dfrac{M_L\,M_S}{d_{LS}^2}\,\vec{u} = M_S\,\vec{a}_G$.

En simplifiant par M_S :

$$\vec{a}_G = -G\,\frac{M_L}{d_{LS}^2}\,\vec{u}$$

COMPRENDRE
La masse du satellite disparaît : l'accélération, donc le mouvement, ne dépend que de la Lune et de la distance d_{LS}.

MÉTHODE
Toujours annoncer le système, le référentiel galiléen et le bilan des forces avant d'écrire la deuxième loi de Newton : ces trois éléments sont attendus dans la rédaction.

5 Représenter le vecteur unitaire tangentiel $\vec{T}$ et le vecteur unitaire normal $\vec{N}$ du repère de Frenet (document réponse).

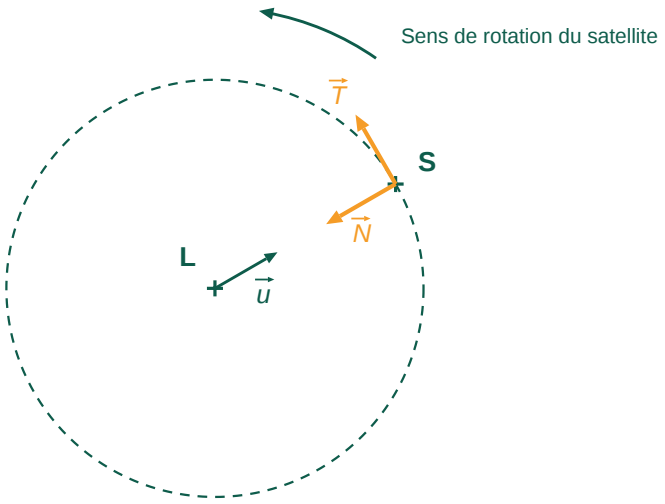
Les deux vecteurs ont pour origine le point S.

$\vec{T}$ est tangent à la trajectoire en S et orienté dans le sens du mouvement.

$\vec{N}$ est perpendiculaire à $\vec{T}$ et orienté vers l'intérieur de la trajectoire, c'est-à-dire vers le centre L.

$\vec{T}$ tangent au cercle dans le sens de rotation ; $\vec{N}$ porté par (SL), dirigé vers L.

PIÈGE
Orienter $\vec{T}$ à l'opposé de la flèche « sens de rotation », ou $\vec{N}$ vers l'extérieur du cercle.



5 · Document réponse : les vecteurs unitaires du repère de Frenet en S, en orange

6 Citer l'expression des coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}_G$ dans le repère de Frenet, dans le cas d'un mouvement circulaire.

Pour un mouvement circulaire de rayon d_{LS}, parcouru à la vitesse v :

$$\vec{a}_G = \frac{v^2}{d_{LS}}\,\vec{N} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{T}$$

COMPRENDRE
La coordonnée selon $\vec{N}$ (v^2/d_{LS}) rend compte du changement de direction de la vitesse ; la coordonnée selon $\vec{T}$ ($\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$) rend compte du changement de sa valeur.

7 En déduire l'expression de l'accélération $\vec{a}_G$ dans le repère de Frenet en fonction de G, M_L, d_{LS} et $\vec{N}$.

$\vec{u}$ est orienté de L vers S et $\vec{N}$ de S vers L : $\vec{N} = -\vec{u}$.

On remplace dans l'expression de la question 4 :

$$\vec{a}_G = G\,\frac{M_L}{d_{LS}^2}\,\vec{N}$$

PIÈGE
Garder le signe « $-$ » devant $\vec{N}$: l'accélération serait dirigée vers l'extérieur. Elle est centripète, comme la force.

8 Justifier que la vitesse v du satellite est constante et montrer que $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_L}{d_{LS}}}$.

On identifie les deux expressions de $\vec{a}_G$ (questions 6 et 7) :

$$\frac{v^2}{d_{LS}}\,\vec{N} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{T} = G\,\frac{M_L}{d_{LS}^2}\,\vec{N} + 0\,\vec{T}$$

Selon $\vec{T}$: $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, donc la valeur v de la vitesse est constante : le mouvement est circulaire uniforme.

Selon $\vec{N}$: $\dfrac{v^2}{d_{LS}} = G\,\dfrac{M_L}{d_{LS}^2}$, d'où $v^2 = \dfrac{G\,M_L}{d_{LS}}$.

$v = \sqrt{\dfrac{G\,M_L}{d_{LS}}}$, expression attendue.

PIÈGE
Affirmer « l'accélération est constante donc la vitesse aussi ». Le vecteur $\vec{a}_G$ change de direction ; c'est sa coordonnée tangentielle nulle qui prouve que v est constante.

9 Démontrer que, pour que le satellite soit fixe par rapport à la Lune, il doit être à une altitude $H = 8{,}67 \times 10^7$ m par rapport à la surface de la Lune.

Données utiles $T = 27{,}3$ jours ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N · m² · kg^{-2} ; $M_L = 7{,}34 \times 10^{22}$ kg ; $R_L = 1{,}74 \times 10^6$ m ; $v = \sqrt{G\,M_L/d_{LS}}$ (Q8)

Le satellite est fixe par rapport à la Lune si sa période de révolution est $T = 27{,}3$ jours (question 1), soit $T = 27{,}3 \times 24 \times 3600 = 2\,358\,720$ s.

Le mouvement est uniforme : le satellite parcourt le périmètre $2\pi\,d_{LS}$ de son orbite pendant la durée T, donc $T = \dfrac{2\pi\,d_{LS}}{v}$.

Avec $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_L}{d_{LS}}}$ et en élevant au carré : $T^2 = \dfrac{4\pi^2\,d_{LS}^2}{G\,M_L/d_{LS}} = \dfrac{4\pi^2\,d_{LS}^3}{G\,M_L}$.

On isole le rayon de l'orbite : $d_{LS} = \sqrt[3]{\dfrac{G\,M_L\,T^2}{4\pi^2}}$.

Or $d_{LS} = R_L + H$, donc $H = \sqrt[3]{\dfrac{G\,M_L\,T^2}{4\pi^2}} - R_L$.

$$H = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 7{,}34 \times 10^{22} \times 2\,358\,720^2}{4\pi^2}} - 1{,}74 \times 10^6$$

Le rayon de l'orbite vaut $d_{LS} = 8{,}84 \times 10^7$ m et le calcul, mené sans arrondi intermédiaire, donne $H = 8{,}66 \times 10^7$ m.

$H = 8{,}66 \times 10^7$ m, en accord avec la valeur annoncée $8{,}67 \times 10^7$ m (écart de 0,1 %, dû aux arrondis).

PIÈGE
Laisser T en jours, ou oublier de retrancher R_L : $8{,}84 \times 10^7$ m est le rayon de l'orbite, pas l'altitude.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme les données. On retrouve exactement $8{,}67$ en arrondissant d'abord T à $2{,}36 \times 10^6$ s ; avec la valeur complète de T, on obtient $8{,}66$.

MÉTHODE
Question à rédiger : condition sur la période, relation $T = 2\pi\,d_{LS}/v$, expression littérale de H, puis une seule application numérique en unités SI.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$27.3 \times 24 \times 3600$
≈ 2358720

$\sqrt[3]{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 7.34 \times 10^{22} \times 2\,358\,720^2}{4 \times \pi^2}}$
$\approx 8.836324 \times 10^7$

$\sqrt[3]{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 7.34 \times 10^{22} \times 2\,358\,720^2}{4 \times \pi^2}} - 1.74 \times 10^6$
$\approx 8.662324 \times 10^7$

$\sqrt[3]{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 7.34 \times 10^{22} \times (2.36 \times 10^6)^2}{4 \times \pi^2}} - 1.74 \times 10^6$
$\approx 8.665521 \times 10^7$

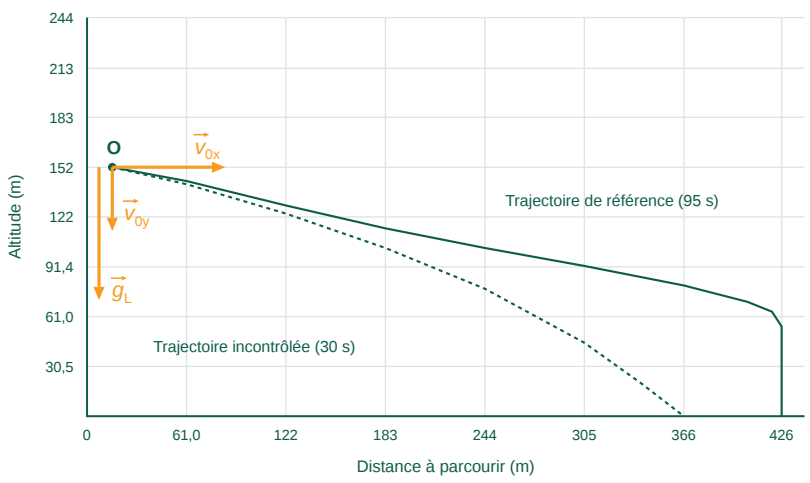
10 Sur le document réponse, représenter au point O, sans souci d'échelle, les vecteurs vitesse horizontale $\vec{v}_{0x}$ et vitesse verticale $\vec{v}_{0y}$, ainsi que le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}_L$.

Au point O, la trajectoire part vers la droite et vers le bas : la vitesse initiale $\vec{v}_0$, tangente à la trajectoire, se décompose en $\vec{v}_{0x}$ et $\vec{v}_{0y}$.

- $\vec{v}_{0x}$: horizontal, orienté vers la droite (sens des distances croissantes).
- $\vec{v}_{0y}$: vertical, orienté vers le bas (l'altitude diminue dès le départ).
- $\vec{g}_L$: vertical, orienté vers le bas (vers le sol lunaire).

$\vec{v}_{0x}$ horizontal vers la droite ; $\vec{v}_{0y}$ et $\vec{g}_L$ verticaux vers le bas, tous d'origine O.

COMPRENDRE
Un mobile n'a qu'un vecteur vitesse : $\vec{v}_{0x}$ et $\vec{v}_{0y}$ sont les deux composantes de $\vec{v}_0$, avec $\vec{v}_0 = \vec{v}_{0x} + \vec{v}_{0y}$.



10 · Document réponse : vecteurs tracés au point O, en orange ($\vec{g}_L$ est décalé vers la gauche pour rester lisible)

11 Justifier le signe négatif ou positif de chacun des trois termes de l'expression $y(t) = -\frac{1}{2}\,g_L\,t^2 - v_{0y}\,t + y_0$.

L'axe vertical (altitude) est orienté vers le haut et son origine est au sol.

- Terme $-\frac{1}{2}\,g_L\,t^2$: $\vec{g}_L$ est dirigé vers le bas, sa coordonnée verticale est $-g_L$; l'accélération $a_y = -g_L$ donne un terme négatif.
- Terme $-v_{0y}\,t$: la vitesse verticale initiale est dirigée vers le bas ; comme v_{0y} désigne sa norme (positive), sa coordonnée est $-v_{0y}$ et le terme est négatif.
- Terme $+y_0$: à $t = 0$, le module est au-dessus du sol, à l'altitude $y_0 = 152{,}4$ m, positive.

Deux termes négatifs (pesanteur et vitesse initiale vers le bas), un terme positif (altitude initiale).

PIÈGE
Confondre norme et coordonnée. Ici $v_{0y} = 4{,}9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ est une norme : le signe « $-$ » est écrit devant. Avec une coordonnée négative, on écrirait $+v_{0y}\,t$.

12 À l'aide de l'équation horaire (1) et de la figure 1, calculer la durée t de descente de l'alunisseur s'il était en chute libre. Indiquer si l'alunisseur, dans sa trajectoire incontrôlée, est ou non en chute libre.

Données utiles $x(t) = v_{0x}\,t + x_0$; $v_{0x} = 18{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $x_0 = 15{,}5$ m ; figure 1 : impact de la trajectoire incontrôlée à $x \approx 366$ m, après 30 s

Sur la figure 1, la trajectoire incontrôlée atteint le sol ($y = 0$) à l'abscisse $x \approx 366$ m.

D'après l'équation (1) : $t = \dfrac{x - x_0}{v_{0x}}$

$$t = \frac{366 - 15{,}5}{18{,}3} = 19{,}2\ \text{s}$$

En chute libre, le module atteindrait cette abscisse en 19 s environ. Or la trajectoire incontrôlée dure 30 s : les deux durées sont nettement différentes.

$t \approx 19\ \text{s} \neq 30\ \text{s}$: sur sa trajectoire incontrôlée, l'alunisseur n'est pas en chute libre.

COMPRENDRE
Il n'y a pas d'atmosphère sur la Lune : si le mouvement n'est pas une chute libre, une autre force que le poids agit, celle des moteurs du module.

MÉTHODE
Autre vérification possible : à $t = 30$ s, l'équation (1) donne $x = 18{,}3 \times 30 + 15{,}5 = 564{,}5$ m, bien au-delà des 366 m lus sur la figure.

À LA CALCULATRICE

