Saut à l'élastique

Bac 2021 Métropole Juin Sujet 2 · Exercice 2 **5 points** **Durée conseillée 55 min**

1 Déterminer les coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}(t)$ de S dans le repère $(Ox\,;\,Oz)$.

Système {sauteur et son équipement}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen. Modèle de la chute libre : la seule force est le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical, dirigé vers le bas, et l'axe (Oz) est orienté vers le haut :

$a_x(t) = 0$ et $a_z(t) = -g$, soit $\vec{a} = -g\,\vec{k}$

PIÈGE
Écrire $a_z = +g$. L'axe (Oz) pointe vers le haut alors que $\vec{g}$ pointe vers le bas : la coordonnée est négative.

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel galiléen, bilan des forces, deuxième loi de Newton, puis projection sur les axes.

2 Établir que l'équation horaire du mouvement selon l'axe Oz s'écrit $z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 - v_0\,t + H$.

Comme $a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -g$, on cherche une primitive : $v_z(t) = -g\,t + C_1$.

À $t = 0$, $\vec{v}_0$ est vertical et dirigé vers le bas : $v_z(0) = -v_0$, donc $C_1 = -v_0$ et $v_z(t) = -g\,t - v_0$.

Comme $v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, une nouvelle primitive donne $z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 - v_0\,t + C_2$.

À $t = 0$, le sauteur est à la hauteur H : $z(0) = H$, donc $C_2 = H$.

$z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 - v_0\,t + H$

PIÈGE
Oublier les constantes d'intégration, ou écrire $v_z(0) = +v_0$: v_0 est une norme (positive) et la vitesse initiale est dirigée vers le bas.

3 La modélisation $z(t) = -4{,}90\,t^2 - 1{,}10\,t + 49{,}8$ est-elle cohérente avec l'expression de la question 2 ? Justifier à l'aide de deux arguments.

Données utiles $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $H \approx 50\ \text{m}$

Les deux expressions sont des polynômes du second degré en t ; on identifie les coefficients.

Terme en t^2 : $\dfrac{1}{2}\,g = 4{,}90$, soit $g = 2 \times 4{,}90 = 9{,}80\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, très proche de $9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

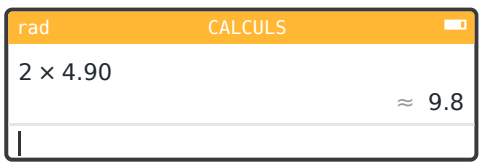
Terme constant : $H = 49{,}8$ m, en accord avec « environ 50 m ».

Le terme en t donne $v_0 = 1{,}10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: il est bien négatif dans l'équation, comme attendu pour un départ vers le bas.

La modélisation est cohérente : elle redonne $g \approx 9{,}80\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ et $H \approx 50$ m.

COMPRENDRE
Le modèle de la chute libre est donc validé pour la première phase : les frottements de l'air y sont négligeables.

À LA CALCULATRICE



4 Calculer la date à laquelle l'élastique commence à se tendre.

Données utiles $L_0 = 8{,}0$ m ; $z(t) = -4{,}90\,t^2 - 1{,}10\,t + 49{,}8$

L'élastique commence à se tendre quand le sauteur est descendu de L_0 : $z(t_1) = H - L_0$, avec $H = 49{,}8$ m.

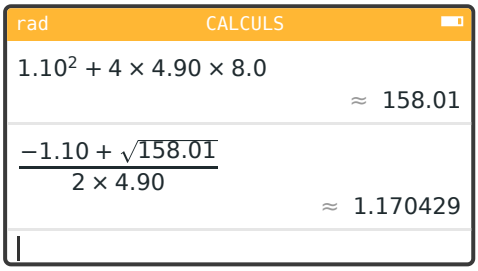
$-4{,}90\,t_1^2 - 1{,}10\,t_1 + 49{,}8 = 49{,}8 - 8{,}0$, soit $4{,}90\,t_1^2 + 1{,}10\,t_1 - 8{,}0 = 0$.

Discriminant : $\Delta = 1{,}10^2 + 4 \times 4{,}90 \times 8{,}0 = 158$. Deux solutions, dont une seule positive :

$$t_1 = \frac{-1{,}10 + \sqrt{158}}{2 \times 4{,}90} = 1{,}17 \text{ s}$$

$t_1 \approx 1{,}2$ s

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
Poser $z = L_0$ ou $z = 0$. L'origine est au sol : après une chute de $8{,}0$ m, le sauteur est à l'altitude $H - L_0$.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme L_0. La valeur est compatible avec la figure 1, où la première phase se termine un peu après $1{,}1$ s. L'autre solution ($-1{,}4$ s) est négative : elle n'a pas de sens ici.

5 En déduire la valeur de la vitesse atteinte à cet instant.

Données utiles $t_1 = 1{,}17$ s (Q4)

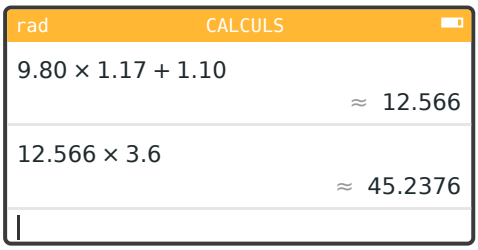
On dérive l'équation horaire : $v_z(t) = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -9{,}80\,t - 1{,}10$.

$v_z(t_1) = -9{,}80 \times 1{,}17 - 1{,}10 = -12{,}6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Le mouvement est vertical : $v = |v_z|$.

$v \approx 13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (soit environ $45 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$)

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
Donner une vitesse négative. On demande la valeur de la vitesse, c'est-à-dire la norme ; le signe de v_z indique seulement le sens du mouvement.

MÉTHODE
Garder la valeur non arrondie de t_1 dans le calcul et n'arrondir qu'à la fin : avec $t_1 = 1{,}2$ s on trouverait encore $13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, mais ce n'est pas toujours le cas.

6.1 Identifier parmi les courbes A, B, C de la figure 1 l'énergie cinétique, l'énergie potentielle de pesanteur et l'énergie mécanique. Justifier.

Données utiles $m = 80$ kg ; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $H = 49{,}8$ m ; $v_0 = 1{,}10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (Q3)

Énergie cinétique $E_c = \dfrac{1}{2} m v^2$: à $t = 0$, $E_c = \dfrac{1}{2} \times 80 \times 1{,}10^2 = 48$ J, presque nulle à l'échelle du graphique ; elle augmente pendant la chute libre et s'annule quand le sauteur s'arrête (fin de la 2e phase). C'est la courbe C.

Énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = m\,g\,z$: à $t = 0$, $E_{pp} = 80 \times 9{,}81 \times 49{,}8 = 3{,}9 \times 10^4$ J, puis elle diminue tant que le sauteur descend et augmente quand il remonte. C'est la courbe B.

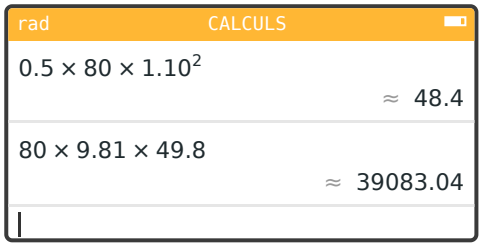
Énergie mécanique $E_m = E_c + E_{pp}$: en chute libre, elle se conserve. La courbe A est quasiment constante, proche de $3{,}9 \times 10^4$ J, pendant la 1re phase.

Courbe A : énergie mécanique ; courbe B : énergie potentielle de pesanteur ; courbe C : énergie cinétique.

PIÈGE
Confondre A et B, qui partent du même point. Ce qui les distingue : B diminue nettement dès le début, alors que A reste presque constante.

COMPRENDRE
On vérifie sur la figure qu'à chaque date de la 1re phase, l'ordonnée de A est la somme de celles de B et de C.

À LA CALCULATRICE



6.2 Identifier l'(les) information(s) manquante(s) sur le système nécessaire(s) au tracé de la suite de la courbe A pour les deuxième et troisième phases.

Dès la 2e phase, l'élastique est tendu : il exerce une force sur le sauteur et stocke de l'énergie potentielle élastique. L'énergie mécanique du système doit alors inclure ce terme, qui dépend de l'allongement de l'élastique et de sa raideur.

L'allongement se déduit de la vidéo, mais on ne connaît pas les caractéristiques de l'élastique.

Il manque la raideur de l'élastique (ou l'expression de la force qu'il exerce), nécessaire au calcul de l'énergie potentielle élastique.

COMPRENDRE
Sans ce terme, la somme $E_c + E_{pp}$ diminue fortement pendant la 2e phase : à $2{,}5$ s elle ne vaut plus que $22\,500$ J. L'écart correspond surtout à l'énergie stockée par l'élastique.

6.3 L'étirement ΔL de l'élastique doit rester inférieur ou égal à $4\,L_0$. À l'aide de la figure 1, calculer la distance maximale parcourue par le sauteur. Conclure.

Données utiles $m = 80$ kg ; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $H = 49{,}8$ m ; $L_0 = 8{,}0$ m

Le sauteur est au plus bas quand E_{pp} est minimale (à $t \approx 2{,}5$ s, où $E_c = 0$). Lecture sur la courbe B : $E_{pp,\min} \approx 22\,500$ J.

Altitude minimale : $z_{\min} = \dfrac{E_{pp,\min}}{m\,g} = \dfrac{22\,500}{80 \times 9{,}81} = 28{,}7$ m.

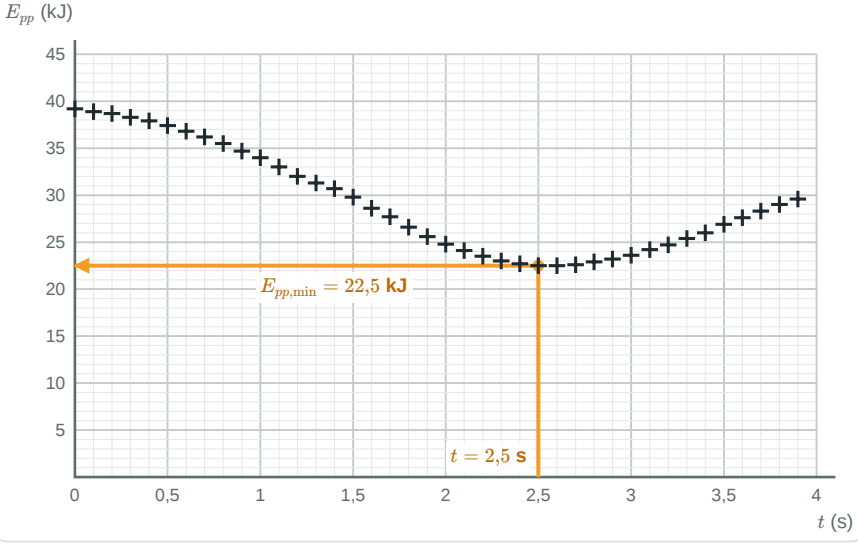
Distance maximale parcourue : $d_{\max} = H - z_{\min} = 49{,}8 - 28{,}7 = 21$ m.

Étirement maximal de l'élastique : $\Delta L = d_{\max} - L_0 = 21 - 8{,}0 = 13$ m, à comparer à $4\,L_0 = 4 \times 8{,}0 = 32$ m.

$d_{\max} \approx 21$ m ; $\Delta L \approx 13\ \text{m} \leqslant 4\,L_0 = 32$ m : la condition de sécurité est respectée.

PIÈGE
Comparer directement la distance parcourue à $4\,L_0$. L'étirement est l'allongement de l'élastique : il faut retrancher sa longueur au repos L_0.

COMPRENDRE
Le sauteur s'arrête à près de 29 m du sol : la marge est large. Même en comparant 21 m à 32 m, la conclusion serait identique.



6.3 · Courbe B de la figure 1 (valeurs relevées), avec la lecture du minimum

À LA CALCULATRICE

