Missions sur la Lune

Bac 2021 Métropole Juin Sujet 1 · Exercice 1 **10 points** **Durée conseillée 1 h 45**

1.1 Calculer la durée passée en orbite terrestre par l'équipage dans le vaisseau Apollo 11.

Données utiles 1,5 tour ; rayon de l'orbite $r = 6{,}56 \times 10^3$ km ; $v_h = 7{,}79 \times 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

En 1,5 tour, le vaisseau parcourt 1,5 fois la circonférence de son orbite : $d = 1{,}5 \times 2\pi r = 3\pi r$.

Sa vitesse a une valeur constante v_h, donc $\Delta t = \dfrac{d}{v_h} = \dfrac{3\pi r}{v_h}$.

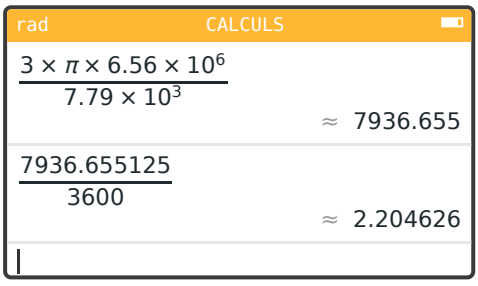
$$\Delta t = \frac{3\pi \times 6{,}56 \times 10^6}{7{,}79 \times 10^3} = 7{,}9 \times 10^3\ \text{s}$$

$\Delta t = 7{,}9 \times 10^3$ s, soit environ 2,2 h (2 h 12 min).

PIÈGE
Le rayon est donné en kilomètres alors que la vitesse est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$: il faut écrire $r = 6{,}56 \times 10^6$ m. Ne pas confondre non plus ce rayon d'orbite avec le rayon de la Terre.

COMPRENDRE
Le résultat garde autant de chiffres significatifs que la donnée la moins précise : ici « 1,5 tour » n'en a que deux, d'où $7{,}9 \times 10^3$ s et non $7{,}94 \times 10^3$ s.

À LA CALCULATRICE



1.2.1 Calculer la valeur de l'énergie cinétique E_c du vaisseau en orbite terrestre.

Données utiles $m_1 = 4{,}50 \times 10^4$ kg ; $v_h = 7{,}79 \times 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

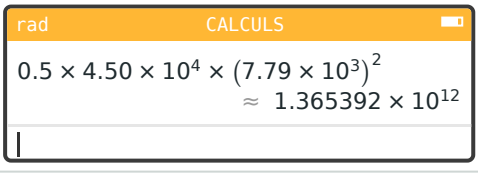
$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_h^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} \times 4{,}50 \times 10^4 \times (7{,}79 \times 10^3)^2 = 1{,}37 \times 10^{12}\ \text{J}$$

$E_c = 1{,}37 \times 10^{12}$ J

PIÈGE
Oublier le carré de la vitesse, ou n'élever au carré que 7,79 sans la puissance de dix : $(10^3)^2 = 10^6$.

À LA CALCULATRICE



1.2.2 En déduire la valeur de l'énergie mécanique E_m du vaisseau en orbite terrestre.

Données utiles $E_p = -2{,}74 \times 10^{12}$ J ; $E_c = 1{,}37 \times 10^{12}$ J (1.2.1)

$$E_m = E_c + E_p$$

$$E_m = 1{,}37 \times 10^{12} + (-2{,}74 \times 10^{12})$$

$E_m = -1{,}37 \times 10^{12}$ J

COMPRENDRE
Une énergie mécanique négative signale un système lié à la Terre : le vaisseau reste en orbite. Sur une orbite circulaire on retrouve d'ailleurs $E_m = -E_c = E_p/2$.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$1.37 \times 10^{12} - 2.74 \times 10^{12}$
$\approx -1.37 \times 10^{12}$

1.3.1 Déterminer l'énergie minimale que doit fournir Saturn V pour mettre le vaisseau en orbite terrestre. Conclure, sachant que Saturn V peut fournir une énergie de l'ordre de 5×10^{12} J.

Données utiles $E_{m0} = -2{,}81 \times 10^{12}$ J ; $E_m = -1{,}37 \times 10^{12}$ J (1.2.2)

L'énergie mécanique du vaisseau passe de E_{m0} (au sol) à E_m (en orbite). La fusée doit lui apporter au minimum cette variation :

$$E_{\text{min}} = E_m - E_{m0} = -1{,}37 \times 10^{12} - (-2{,}81 \times 10^{12}) = 1{,}44 \times 10^{12} \text{ J}$$

Or $1{,}44 \times 10^{12}$ J $< 5 \times 10^{12}$ J.

$E_{\text{min}} = 1{,}44 \times 10^{12}$ J : Saturn V a la capacité de mettre Apollo 11 en orbite terrestre.

PIÈGE
Calculer $E_{m0} - E_m$ donne une énergie négative. Une énergie à fournir est une variation « état final moins état initial », ici positive.

COMPRENDRE
C'est un minimum : la fusée doit aussi élever sa propre masse, son carburant, et compenser les frottements de l'air. D'où la marge entre $1{,}44 \times 10^{12}$ J et 5×10^{12} J.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$-1.37 \times 10^{12} - (-2.81 \times 10^{12})$
$\approx 1.44 \times 10^{12}$

1.3.2 Expliquer pourquoi l'énergie cinétique du vaisseau avant le décollage n'est pas nulle dans le référentiel géocentrique.

Dans le référentiel géocentrique, la Terre tourne sur elle-même autour de l'axe des pôles. Le vaisseau posé sur le pas de tir est entraîné par cette rotation : il décrit un cercle autour de l'axe des pôles, à raison d'un tour par jour.

Sa vitesse v n'est donc pas nulle dans ce référentiel, et comme $E_c = \frac{1}{2} m_1 v^2$:

Avant le décollage, le vaisseau est immobile par rapport au sol mais en mouvement dans le référentiel géocentrique : $E_c \neq 0$.

COMPRENDRE
Une vitesse dépend toujours du référentiel. Dans le référentiel terrestre (lié au sol), le vaisseau est au repos et son énergie cinétique est nulle.

2.1 En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ du vaisseau Apollo 11 à l'altitude h_L.

Système {vaisseau}, de masse m_2 constante ; référentiel centré sur la Lune, supposé galiléen.

Seule force : l'attraction gravitationnelle de la Lune, dirigée du vaisseau vers le centre de la Lune, donc selon $\vec{n}$:

$$\vec{F}_{L/V} = \frac{G\, M_L\, m_2}{(R_L + h_L)^2}\, \vec{n}$$

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_2\, \vec{a}$, soit $\frac{G\, M_L\, m_2}{(R_L + h_L)^2}\, \vec{n} = m_2\, \vec{a}$.

$$\vec{a} = \frac{G\, M_L}{(R_L + h_L)^2}\, \vec{n}$$

PIÈGE
La distance entre le vaisseau et le centre de la Lune est $R_L + h_L$, pas h_L. Et la masse à faire figurer dans la force est M_L, celle de l'astre attracteur.

COMPRENDRE
La masse m_2 se simplifie : l'accélération ne dépend pas de la masse du vaisseau. Elle est dirigée vers le centre de la Lune (centripète).

2.2 Montrer que la norme de la vitesse du vaisseau à l'altitude h_L a pour expression $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_L}{R_L + h_L}}$.

Données utiles $\vec{a}$ (2.1)

Le mouvement est circulaire, de rayon $R_L + h_L$. Dans le repère de Frenet $(\vec{n}, \vec{t})$, où $\vec{t}$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire :

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R_L + h_L}\vec{n} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{t}$$

Le mouvement étant uniforme, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$. En identifiant avec l'expression de la question 2.1 selon $\vec{n}$:

$\dfrac{v^2}{R_L + h_L} = \dfrac{G\,M_L}{(R_L + h_L)^2}$, donc $v^2 = \dfrac{G\,M_L}{R_L + h_L}$.

$v = \sqrt{\dfrac{G\,M_L}{R_L + h_L}}$, ce qui est l'expression attendue.

PIÈGE
Écrire directement $a = v^2/r$ sans citer le repère de Frenet ni le caractère uniforme du mouvement : la justification est notée.

MÉTHODE
Orbite circulaire : 1) deuxième loi de Newton ; 2) accélération dans le repère de Frenet ; 3) identification. Selon $\vec{t}$: mouvement uniforme. Selon $\vec{n}$: expression de la vitesse.

2.3 Calculer la période de révolution T du vaisseau Apollo 11, puis déterminer le nombre de tours effectués par Michael Collins autour de la Lune pendant le séjour des deux autres astronautes sur la Lune.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$; $M_L = 7{,}34 \times 10^{22}$ kg ; $R_L = 1{,}73 \times 10^3$ km ; $h_L = 110$ km ; séjour : 21 h 36 min ; v (2.2)

Pendant une période T, le vaisseau parcourt la circonférence $2\pi(R_L + h_L)$ à la vitesse constante v :

$$T = \frac{2\pi(R_L + h_L)}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{(R_L + h_L)^3}{G\,M_L}}$$

Avec $R_L + h_L = 1{,}73 \times 10^6 + 110 \times 10^3 = 1{,}84 \times 10^6$ m :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(1{,}84 \times 10^6)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 7{,}34 \times 10^{22}}} = 7{,}09 \times 10^3\ \mathrm{s}$$

soit environ 1,97 h.

Durée du séjour : $\Delta t = 21 \times 3600 + 36 \times 60 = 7{,}776 \times 10^4$ s.

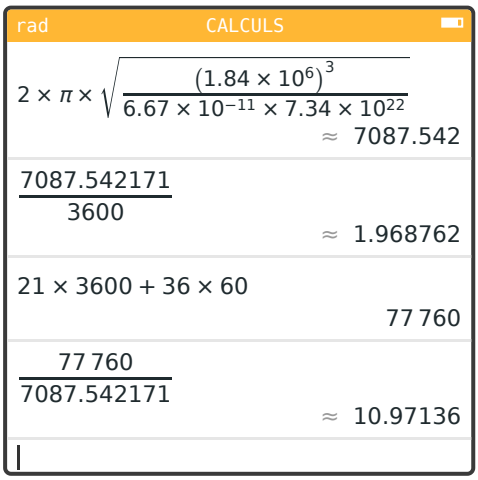
Nombre de tours : $N = \dfrac{\Delta t}{T} = \dfrac{7{,}776 \times 10^4}{7{,}09 \times 10^3} = 11{,}0$

$T = 7{,}09 \times 10^3$ s ; Michael Collins a fait environ 11 tours autour de la Lune.

PIÈGE
Convertir R_L et h_L en mètres avant de les additionner, et convertir 21 h 36 min en secondes : 21 h 36 min ne vaut pas 21,36 h mais 21,6 h.

COMPRENDRE
On peut aussi calculer d'abord $v = 1{,}63 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, puis T. La masse m_2 du vaisseau n'intervient nulle part.

À LA CALCULATRICE



3.1 En utilisant la modélisation numérique, déterminer l'expression numérique de la vitesse $v_y(t)$ de John Young. Calculer la valeur de sa vitesse initiale v_{0y}.

Données utiles $y(t) = -0{,}86\,t^2 + 1{,}4\,t$ (y en m, t en s)

La vitesse est la dérivée de la position par rapport au temps : $v_y(t) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

$v_y(t) = -0{,}86 \times 2\,t + 1{,}4 = -1{,}72\,t + 1{,}4$ (avec v_y en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et t en s).

À la date $t = 0$: $v_{0y} = v_y(0) = -1{,}72 \times 0 + 1{,}4$.

$v_y(t) = -1{,}72\,t + 1{,}4$ et $v_{0y} = 1{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

COMPRENDRE
v_{0y} est positive : au début du saut, John Young se déplace vers le haut, dans le sens de l'axe Oy. C'est aussi la pente de la tangente à la courbe $y(t)$ à l'origine.

3.2 Montrer que la valeur de l'intensité de la pesanteur lunaire g_L est d'environ $1{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Données utiles $v_y(t) = -1{,}72\,t + 1{,}4$ (3.1)

Système {John Young et son équipement}, de masse m ; référentiel lunaire (lié au sol), supposé galiléen.

Chute libre : la seule force est le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}_L$. La deuxième loi de Newton donne $m\,\vec{g}_L = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}_L$.

Le vecteur $\vec{g}_L$ est vertical vers le bas et l'axe Oy est orienté vers le haut : $a_y = -g_L$.

Or $a_y = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -1{,}72\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, d'où $g_L = 1{,}72\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

$g_L = 1{,}72\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \approx 1{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, valeur attendue.

PIÈGE
Annoncer $g_L = -1{,}72\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Une intensité de pesanteur est positive : c'est la coordonnée a_y qui est négative, parce que l'axe est orienté vers le haut.

MÉTHODE
En chute libre, $y(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_{0y}\,t$. On identifie avec la modélisation : $\dfrac{1}{2}\,g_L = 0{,}86$, soit $g_L = 1{,}72\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

3.3 Déterminer la hauteur et la durée d'un saut vertical qu'aurait réalisé John Young avec son équipement sur la Terre, avec la même vitesse initiale v_{0y}, dans le cadre du modèle de la chute libre. Commenter.

Données utiles $g_T = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $v_{0y} = 1{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (3.1) ; sur la Lune : hauteur 60 cm, durée d'environ 1,7 s (figure 2)

Sur la Terre, le même raisonnement qu'à la question 3.2 donne $a_y = -g_T$. Par intégrations successives, avec $v_y(0) = v_{0y}$ et $y(0) = 0$:

$$v_y(t) = -g_T\,t + v_{0y} \qquad y(t) = -\frac{1}{2}\,g_T\,t^2 + v_{0y}\,t$$

Durée du saut. John Young retombe au sol quand $y(t) = 0$ avec $t \neq 0$: $-\dfrac{1}{2}\,g_T\,t + v_{0y} = 0$, soit

$$t_{\text{saut}} = \frac{2\,v_{0y}}{g_T} = \frac{2 \times 1{,}4}{9{,}81} = 0{,}29\ \mathrm{s}$$

Hauteur du saut. Au sommet, la vitesse s'annule : $v_y(t_S) = 0$, soit $t_S = \dfrac{v_{0y}}{g_T} = 0{,}14\ \mathrm{s}$ (la moitié de la durée du saut). Alors

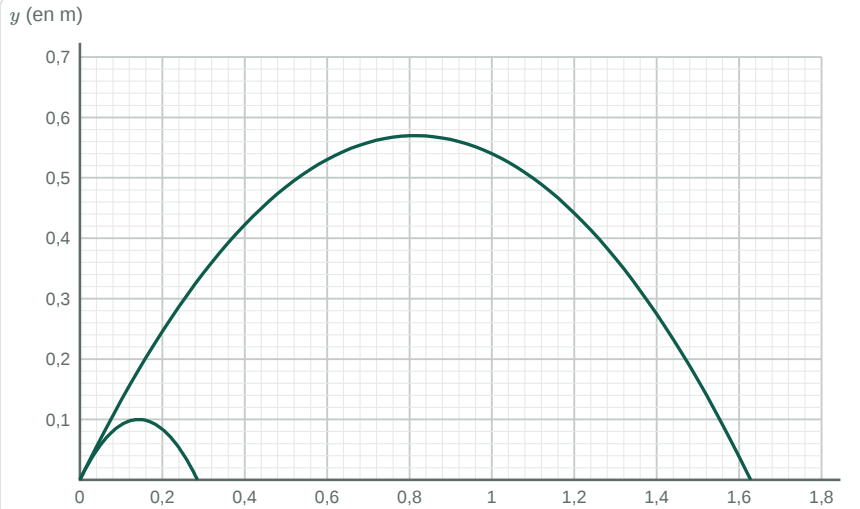
$$y_{\max} = y(t_S) = \frac{v_{0y}^2}{2\,g_T} = \frac{1{,}4^2}{2 \times 9{,}81} = 0{,}10\ \mathrm{m}$$

Commentaire. Sur la Terre, le saut n'atteindrait que 10 cm et durerait 0,29 s, contre 60 cm et environ 1,7 s sur la Lune : il serait à peu près six fois moins haut et six fois plus court, car la pesanteur terrestre est environ six fois plus intense ($g_T / g_L \approx 5{,}8$). C'est la faible pesanteur lunaire qui permet un tel saut malgré une masse de 150 kg.

Sur la Terre : $y_{\max} = 0{,}10\ \mathrm{m}$ (10 cm) et $t_{\text{saut}} = 0{,}29\ \mathrm{s}$, soit environ six fois moins que sur la Lune.

PIÈGE
Confondre la durée de la montée (0,14 s) et la durée du saut (0,29 s). Autre erreur : faire intervenir la masse de 150 kg, alors qu'en chute libre le mouvement n'en dépend pas.

COMPRENDRE
Hauteur et durée sont inversement proportionnelles à g : $y_{\max} = v_{0y}^2/(2g)$ et $t_{\text{saut}} = 2v_{0y}/g$. Diviser g par six multiplie donc les deux par six.



3.3 · Même vitesse initiale v_{0y} : saut sur la Lune (grande courbe, modélisation du sujet) et saut sur la Terre (petite courbe, 10 cm en 0,29 s)

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{2 \times 1.4}{9.81} \approx 0.285423$

$\frac{1.4}{9.81} \approx 0.1427115$

$\frac{1.4^2}{2 \times 9.81} \approx 0.09989806$

$\frac{9.81}{1.7} \approx 5.770588$