Un système de détection de passager

Bac 2021 Métropole Mars Sujet 2 · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 55 min**

1.1 Justifier l'utilisation de l'adjectif « capacitif » dans l'expression « capteur de pression capacitif ».

Deux feuilles conductrices (aluminium) séparées par un isolant (papier) forment un condensateur. La pression exercée modifie la capacité C de ce condensateur : c'est la variation de C qui permet la mesure.

Le capteur est un condensateur dont la capacité dépend de la pression : il est « capacitif ».

1.2 Donner l'expression littérale de la charge Q_A puis celle de la charge Q_B en fonction de C et U_{AB}.

La tension U_{AB} est positive : l'armature A porte une charge positive, l'armature B la charge opposée.

$Q_A = C \times U_{AB}$ et $Q_B = -Q_A = -C \times U_{AB}$

PIÈGE
Donner la même charge aux deux feuilles. Les armatures d'un condensateur portent toujours des charges opposées ; l'ensemble reste électriquement neutre.

1.3 Indiquer, en justifiant, le sens de variation de la capacité C du capteur quand un objet est posé sur le condensateur « artisanal ».

Données utiles $C = \dfrac{\varepsilon \times S}{e}$

L'objet appuie sur les feuilles et écrase le papier : l'épaisseur e diminue, alors que ε et S sont supposées inchangées.

Comme C est inversement proportionnelle à e, une diminution de e entraîne une augmentation de C.

Quand un objet est posé sur le capteur, e diminue donc C augmente.

COMPRENDRE
La question est ouverte : on attend surtout une hypothèse énoncée clairement et un raisonnement cohérent avec la formule. La relation donnée avant la question 3.2 confirme que c'est bien l'épaisseur qui varie.

2.1 Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ pour $t \geq 0$, l'écrire sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{\tau} = 0$ et exprimer τ en fonction de R et C.

En position 2, le générateur est hors circuit. Loi des mailles : $u_R + u_C = 0$.

Loi d'Ohm : $u_R = R \times i$.

Pour le condensateur : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $q = C \times u_C$ avec C constante, donc $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

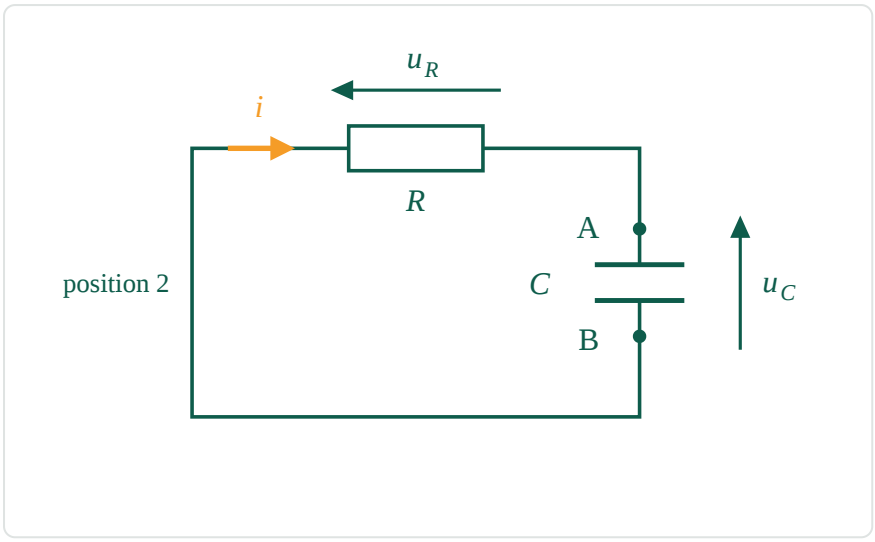
On remplace : $RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$, puis on divise par RC :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{RC} = 0$$

$\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{\tau} = 0$ avec $\tau = R \times C$

PIÈGE
Garder E dans la loi des mailles. Pour $t \geq 0$, la maille ne contient plus que le conducteur ohmique et le condensateur : le second membre est nul.

MÉTHODE
Toujours trois étapes : 1) loi des mailles ; 2) loi d'Ohm et relation $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$; 3) substitution puis division par le coefficient de la dérivée.



2.1 · Circuit pour t ≥ 0 (commutateur en position 2), avec le sens choisi pour i

2.2 Vérifier que $u_C(t) = A \times \mathrm{e}^{-t/\tau}$ est solution de l'équation différentielle et exprimer A en fonction de E.

Données utiles $u_C(0) = E$

On dérive : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{A}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

On reporte dans le premier membre de l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = -\frac{A}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{A}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau} = 0$$

L'égalité est vraie à toute date : la fonction proposée est bien solution.

Condition initiale : $u_C(0) = A \times \mathrm{e}^{0} = A$ et $u_C(0) = E$.

$A = E$, soit $u_C(t) = E \times \mathrm{e}^{-t/\tau}$

PIÈGE

Oublier le facteur $-\dfrac{1}{\tau}$ en dérivant l'exponentielle : la somme ne s'annule alors plus.

2.3 Montrer que le condensateur est déchargé à la date $t = 5\,\tau$, c'est-à-dire que u_C ne vaut plus que 1 % de sa valeur initiale.

Données utiles $u_C(t) = E \times \mathrm{e}^{-t/\tau}$ (2.2)

À la date $t = 5\,\tau$:

$$u_C(5\,\tau) = E \times \mathrm{e}^{-5\tau/\tau} = E \times \mathrm{e}^{-5} = 6{,}7 \times 10^{-3} \times E$$

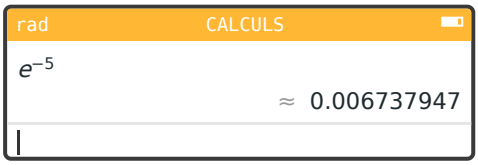
La tension ne vaut plus que 0,67 % de sa valeur initiale E, ce qui est inférieur à 1 %.

$\dfrac{u_C(5\,\tau)}{E} = \mathrm{e}^{-5} \approx 0{,}67\,\% < 1\,\%$: le condensateur est déchargé à $t = 5\,\tau$.

COMPRENDRE

Le seuil de 1 % est franchi un peu avant $5\,\tau$ (à $t = \tau \times \ln(100) \approx 4{,}6\,\tau$). À $5\,\tau$, la tension est déjà passée sous ce seuil : la décharge est considérée comme terminée.

À LA CALCULATRICE



3.1 Associer chaque série de mesures (▲ ou ■) au dispositif sans pression ou au dispositif avec pression. Justifier.

Données utiles $\tau = R \times C$ (2.1) ; C augmente avec la pression (1.3)

À chaque date, la tension de la série ▲ est supérieure à celle de la série ■ : la décharge ▲ est la plus lente, donc $\tau_{▲} > \tau_{■}$.

Comme $\tau = R \times C$ avec la même résistance R, on en déduit $C_{▲} > C_{■}$.

Or la capacité augmente lorsqu'une pression écrase le papier (1.3).

Série ▲ : dispositif avec pression ; série ■ : dispositif sans pression.

MÉTHODE

Pour comparer deux décharges sans calcul : la courbe qui reste au-dessus de l'autre a le plus grand temps caractéristique, donc ici la plus grande capacité.

3.2 Déterminer la valeur de la variation d'épaisseur Δe, après avoir évalué la variation de capacité électrique ΔC.

Données utiles $E = 5$ V ; $R = 10$ MΩ ; $e = 1{,}0 \times 10^{-4}$ m ; $\dfrac{\Delta C}{C} = \dfrac{\Delta e}{e}$

À $t = \tau$, $u_C(\tau) = E \times \mathrm{e}^{-1} = 0{,}37 \times E = 0{,}37 \times 5 = 1{,}85$ V.

Lecture graphique des dates où $u_C = 1{,}85$ V : $\tau_{\blacksquare} = 110$ ms (sans pression) et $\tau_{\blacktriangle} = 140$ ms (avec pression).

Capacité sans pression : $C = \dfrac{\tau_{\blacksquare}}{R} = \dfrac{110 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{6}} = 1{,}1 \times 10^{-8}$ F.

Variation de capacité :

$$\Delta C = \frac{\tau_{\blacktriangle} - \tau_{\blacksquare}}{R} = \frac{(140 - 110) \times 10^{-3}}{10 \times 10^{6}} = 3{,}0 \times 10^{-9} \text{ F}$$

Variation d'épaisseur :

$$\Delta e = \frac{\Delta C}{C} \times e = \frac{3{,}0 \times 10^{-9}}{1{,}1 \times 10^{-8}} \times 1{,}0 \times 10^{-4} = 2{,}7 \times 10^{-5} \text{ m}$$

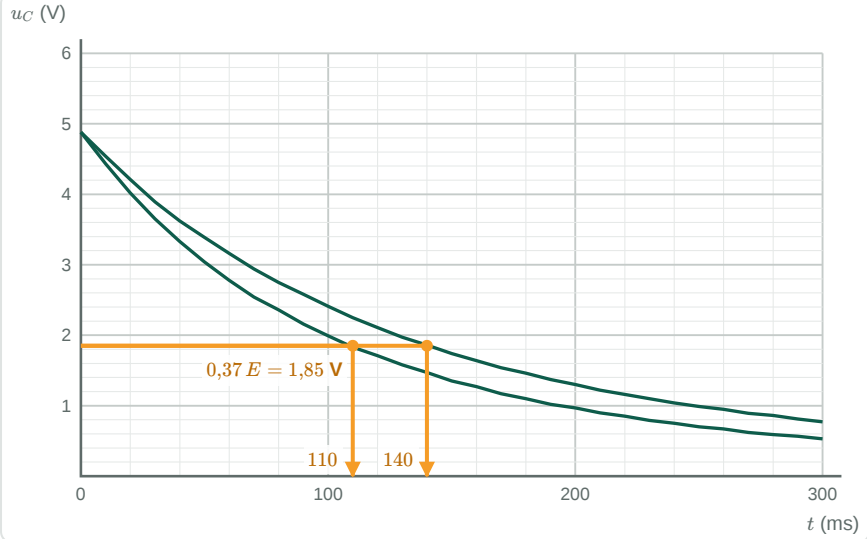
La relation de l'énoncé porte sur les valeurs absolues : C augmente, donc l'épaisseur diminue.

$\Delta C = 3{,}0 \times 10^{-9}$ F et l'épaisseur diminue de $\Delta e = 2{,}7 \times 10^{-5}$ m, soit environ 27 µm.

PIÈGE
Laisser τ en millisecondes ou R en mégaohms : $110 \text{ ms} = 110 \times 10^{-3}$ s et $10 \text{ MΩ} = 10 \times 10^{6}$ Ω.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme R et e ; la lecture graphique ne permet pas mieux. Avec $C = \dfrac{\varepsilon S}{e}$, C et e varient en sens contraires : en toute rigueur $\dfrac{\Delta C}{C} = -\dfrac{\Delta e}{e}$.

MÉTHODE
Lire τ à 37 % de la valeur initiale est plus précis que tracer la tangente à l'origine sur un nuage de points.



3.2 · Figure 7 du sujet (début) : courbe du haut ▲, courbe du bas ■ ; lecture de τ à 1,85 V

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

0.37×5 ≈ 1.85

$\dfrac{110 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{6}}$ ≈ 1.1×10^{-8}

$\dfrac{140 \times 10^{-3} - 110 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{6}}$ ≈ 3×10^{-9}

$\dfrac{3.0 \times 10^{-9}}{1.1 \times 10^{-8}} \times 1.0 \times 10^{-4}$ ≈ 2.727273×10^{-5}