Un saut stratosphérique

Bac 2021 Métropole Mars Sujet 2 · Exercice 2 **5 points** **Durée conseillée 55 min**

1.1 Calculer la différence $\Delta g = |g(z_{\max}) - g(z_{\min})|$ entre les valeurs du champ de pesanteur aux limites de la stratosphère.

Données utiles $g(z) = \dfrac{g_0 \times R_T^2}{(R_T + z)^2}$; $g_0 = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $R_T = 6\,370$ km ; $z_{\min} = 11$ km ; $z_{\max} = 50$ km

Les distances restent en kilomètres : le rapport $\dfrac{R_T^2}{(R_T + z)^2}$ n'a pas d'unité.

$$g(z_{\max}) = \frac{9{,}81 \times 6\,370^2}{(6\,370 + 50)^2} = 9{,}658\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$g(z_{\min}) = \frac{9{,}81 \times 6\,370^2}{(6\,370 + 11)^2} = 9{,}776\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$\Delta g = |9{,}658 - 9{,}776| = 0{,}118\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$\boxed{\Delta g \approx 0{,}12\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$$

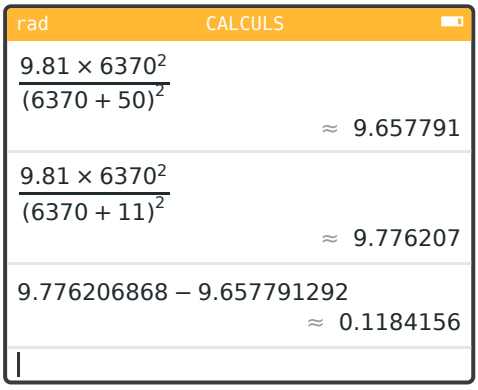
PIÈGE

Arrondir g trop tôt, ou mélanger kilomètres et mètres dans la parenthèse $(R_T + z)$. On garde les valeurs intermédiaires en mémoire et on arrondit à la fin.

COMPRENDRE

Chaque valeur de g est connue à trois chiffres significatifs (9,66 et 9,78). Leur différence n'est donc fiable qu'au centième : on annonce deux chiffres significatifs.

À LA CALCULATRICE



1.2 Le champ est dit uniforme si sa variation, rapportée à sa valeur à l'altitude $z_{\max}$, est inférieure à 2 %. Est-ce le cas dans la stratosphère ?

Données utiles $\Delta g = 0{,}118\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (1.1) ; $g(z_{\max}) = 9{,}66\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (1.1)

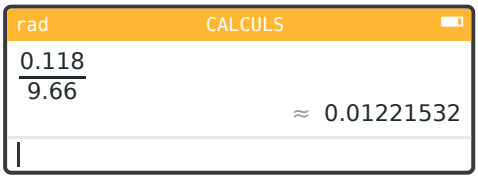
Variation relative : $\dfrac{\Delta g}{g(z_{\max})} = \dfrac{0{,}118}{9{,}66} = 1{,}2 \times 10^{-2}$, soit 1,2 %.

$1{,}2\ \% < 2\ \%$: le champ de pesanteur peut être considéré comme **uniforme** dans la stratosphère.

MÉTHODE

Pour juger si une grandeur est « quasi constante », on calcule l'écart relatif (écart divisé par la valeur de référence imposée par l'énoncé), puis on le compare au critère donné.

À LA CALCULATRICE



2 Établir, dans le modèle de la chute libre, l'équation horaire $z(t)$ de l'altitude du centre de masse en fonction de t, g et $z_{\text{départ}}$.

Données utiles axe Oz vertical vers le haut, origine au sol ; à $t = 0$: vitesse nulle, altitude $z_{\text{départ}}$

Système {Félix Baumgartner et son équipement}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen. En chute libre, la seule force est le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $m\,\vec{a} = m\,\vec{g}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical vers le bas et l'axe est orienté vers le haut : $a_z = -g$.

Comme $a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$, par intégration : $v_z(t) = -g\,t + C_1$. À $t = 0$, $v_z = 0$, donc $C_1 = 0$: $\quad v_z(t) = -g\,t$.

Comme $v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, par intégration : $z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + C_2$. À $t = 0$, $z = z_{\text{départ}}$, donc $C_2 = z_{\text{départ}}$.

$$z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + z_{\text{départ}}$$

PIÈGE
Oublier le signe « − » : l'axe pointe vers le haut alors que $\vec{g}$ pointe vers le bas. Oublier les constantes d'intégration, ou ne pas les justifier par les conditions initiales.

MÉTHODE
Toujours le même enchaînement : système, référentiel, bilan des forces, deuxième loi de Newton, projection sur l'axe, puis deux intégrations successives avec les conditions initiales.

3 En déduire, dans ce modèle, l'altitude à laquelle la valeur de la vitesse est égale à $307\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Données utiles $v = 307\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $g = 9{,}66\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$; $z_{\text{départ}} = 38\,969$ m ; $v_z(t) = -g\,t$ et $z(t)$ (Q2)

La valeur de la vitesse est $v = |v_z| = g\,t$. Elle vaut $307\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ à la date $t_1 = \dfrac{v}{g} = \dfrac{307}{9{,}66} = 31{,}8$ s.

On remplace dans l'équation horaire :

$$z(t_1) = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{v}{g}\right)^2 + z_{\text{départ}} = z_{\text{départ}} - \frac{v^2}{2\,g}$$

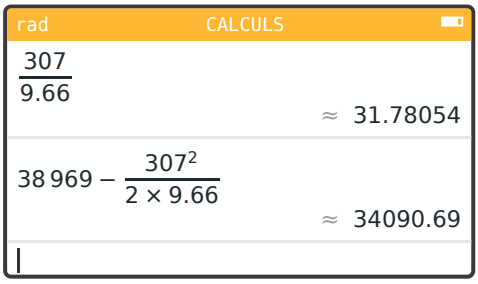
$$z(t_1) = 38\,969 - \frac{307^2}{2 \times 9{,}66} = 34\,091\ \mathrm{m}$$

$z(t_1) \approx 3{,}41 \times 10^4$ m, soit environ 34,1 km

PIÈGE
Calculer $z(t_1)$ avec la valeur arrondie $t_1 = 31{,}8$ s : on obtient 34 085 m au lieu de 34 091 m. Mieux vaut l'expression littérale $z_{\text{départ}} - \dfrac{v^2}{2g}$.

COMPRENDRE
La hauteur de chute $\dfrac{v^2}{2g} = 4{,}88 \times 10^3$ m n'est connue qu'à trois chiffres significatifs : l'altitude est fiable à la dizaine de mètres près, d'où $3{,}41 \times 10^4$ m.

À LA CALCULATRICE



4 Indiquer, dans ce modèle et en justifiant, si Félix Baumgartner a dépassé la vitesse du son lorsqu'il atteint cette altitude.

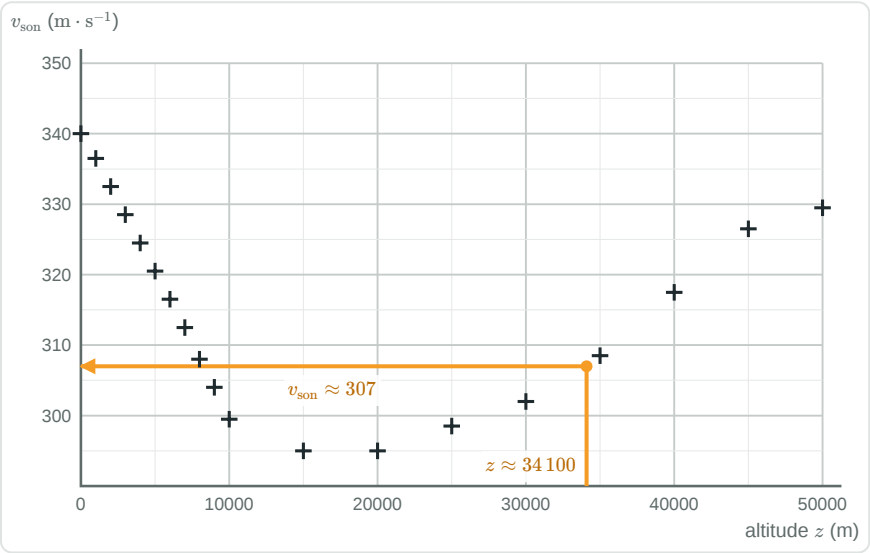
Données utiles figure 1 ; $z(t_1) \approx 34\,100$ m (Q3) ; $v = 307\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Sur la figure 1, la vitesse du son vaut environ $302\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ à 30 000 m et environ $308\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ à 35 000 m. À 34 100 m, on estime donc $v_{\text{son}} \approx 307\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

La vitesse du sauteur ($307\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) est égale à celle du son, à la précision de la lecture graphique (un ou deux mètres par seconde).

Dans ce modèle, il **atteint tout juste** la vitesse du son à cette altitude ; la lecture graphique ne permet pas d'affirmer qu'il l'a nettement dépassée. Sa vitesse continuant d'augmenter, il la dépasse aussitôt après.

COMPRENDRE
La vitesse du son dépend de l'altitude. Il faut la lire à l'altitude où se trouve le sauteur, et non prendre la valeur au sol ($340\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).



4 · Figure 1 du sujet, avec la lecture à l'altitude trouvée en question 3

5 Comparer la norme de la force de frottement de l'air et celle du poids lorsque la vitesse atteint $307\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ à l'altitude de 33 446 m. Critiquer le modèle de chute libre.

Données utiles $f = 0{,}4 \times \rho_{\text{air}}(z) \times v^2$; $m = 120$ kg ; $g = 9{,}66\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; figure 2

Lecture sur la figure 2 : à $z = 33\,446$ m, $\rho_{\text{air}} \approx 0{,}010\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Frottement : $f = 0{,}4 \times 0{,}010 \times 307^2 \approx 3{,}8 \times 10^2$ N.

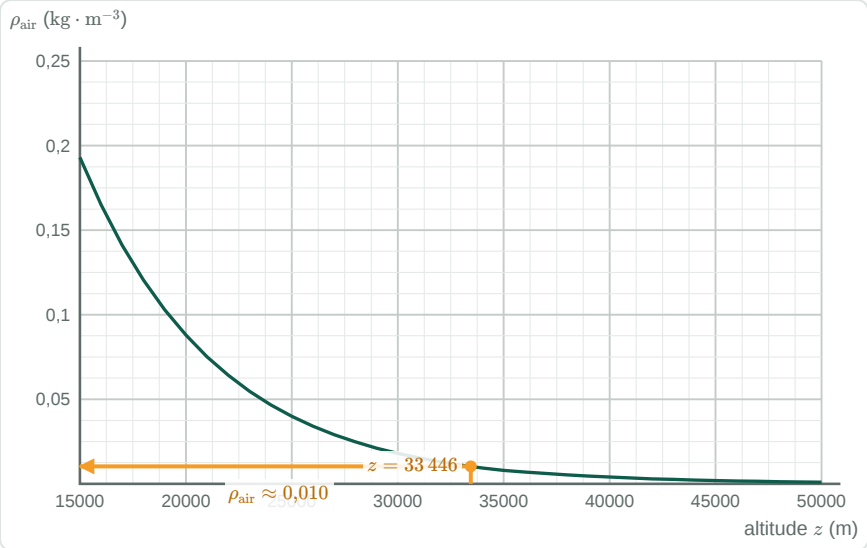
Poids : $P = m\,g = 120 \times 9{,}66 = 1{,}16 \times 10^3$ N.

Rapport : $\dfrac{P}{f} = \dfrac{1{,}16 \times 10^3}{3{,}8 \times 10^2} \approx 3.$

$f \approx \dfrac{P}{3}$: le frottement n'est **pas négligeable** devant le poids. Le modèle de la chute libre, qui ne retient que le poids, n'est pas adapté à cette altitude.

COMPRENDRE
La masse volumique lue est très petite, donc imprécise : f n'est qu'un ordre de grandeur. Cela suffit pour conclure, car une force est négligeable seulement si elle est au moins dix fois plus faible que l'autre.

COMPRENDRE
Le frottement freine la chute : la vitesse du son est atteinte en réalité à 33 446 m, donc plus bas que les 34 100 m prévus par la chute libre.



5 · Figure 2 du sujet, avec la lecture à l'altitude z_{son}

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$0.4 \times 0.010 \times 307^2 \approx 376.996$

$120 \times 9.66 \approx 1159.2$

$\frac{1159.2}{376.996} \approx 3.074834$

6 En supposant la vitesse limite atteinte après 4 000 m de chute, calculer la vitesse limite v_{lim} pour un saut depuis l'altitude $z = 20\,000$ m.

Données utiles $f = 0{,}4 \times \rho_{air}(z) \times v^2$; $m = 120$ kg ; $g = 9{,}66$ m · s^{-2} ; figure 2

Après 4 000 m de chute, l'altitude est $z = 20\,000 - 4\,000 = 16\,000$ m.
Lecture sur la figure 2 : $\rho_{air} \approx 0{,}17$ kg · m^{-3}.

À la vitesse limite, $f = P$:

$$0{,}4 \times \rho_{air} \times v_{lim}^2 = m\,g \quad \text{donc} \quad v_{lim} = \sqrt{\frac{m\,g}{0{,}4 \times \rho_{air}}}$$

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{120 \times 9{,}66}{0{,}4 \times 0{,}17}} = 1{,}3 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$v_{lim} \approx 1{,}3 \times 10^2$ m · s^{-1}

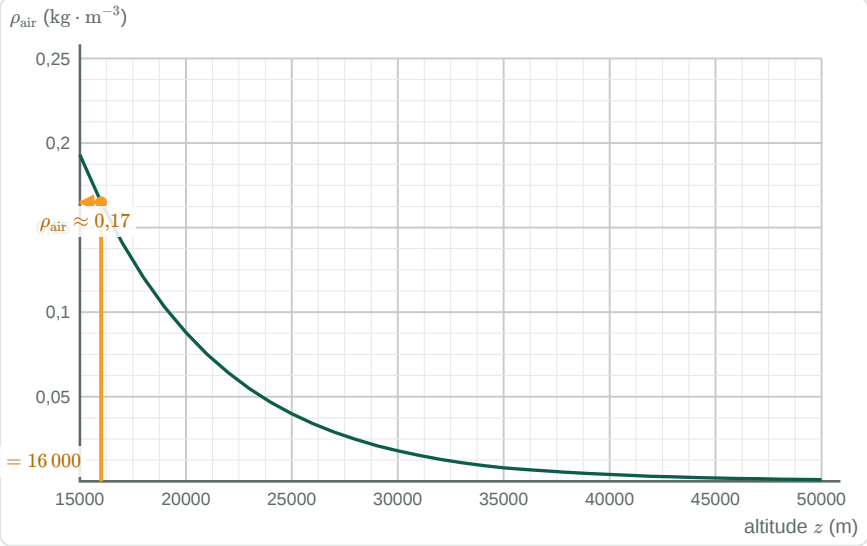
PIÈGE
Lire ρ_{air} à 20 000 m, l'altitude du départ. La vitesse limite est atteinte 4 000 m plus bas : la lecture se fait à 16 000 m.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme la valeur lue sur le graphique. Une lecture entre 0,16 et 0,18 donne de 127 à 135 m · s^{-1} : le résultat $1{,}3 \times 10^2$ reste valable.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\sqrt{\frac{120 \times 9.66}{0.4 \times 0.17}} \approx 130.5644$



6 · Figure 2 du sujet, avec la lecture à 16 km d'altitude

7 Expliquer qualitativement pourquoi il est nécessaire de s'élancer depuis la zone supérieure de la stratosphère pour atteindre une vitesse égale à celle du son.

Données utiles $v_{\text{lim}} \approx 1{,}3 \times 10^{2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (Q6) ; figures 1 et 2

Pour un saut depuis 20 000 m, la vitesse limite (environ $130\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) reste très inférieure à la vitesse du son à 16 000 m (environ $295\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ sur la figure 1) : le mur du son n'est pas atteint.

D'après la figure 2, la masse volumique de l'air diminue fortement quand l'altitude augmente. Or $v_{\text{lim}} = \sqrt{\dfrac{m\,g}{0{,}4 \times \rho_{\text{air}}}}$: plus l'air est rare, plus le frottement est faible à vitesse donnée et plus la vitesse limite est grande.

Dans la haute stratosphère, l'air très peu dense freine peu : le sauteur peut y dépasser $300\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ avant que le frottement ne compense le poids. Plus bas, la vitesse limite est trop faible.

COMPRENDRE

Autre atout : entre 20 et 50 km, la vitesse du son augmente avec l'altitude mais ne varie que de 295 à 330 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. C'est donc bien la masse volumique de l'air qui décide.