Détermination de la masse de la Lune

Bac 2021 Centres étrangers Sujet 1 · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 55 min**

1 Donner l'expression vectorielle de la force gravitationnelle $\overrightarrow{F}_{\text{Lune/marteau}}$ en fonction de M_L, m, R_L et du vecteur unitaire $\vec{u}$ orienté du centre de la Lune vers sa surface. Représenter cette force sur un schéma.

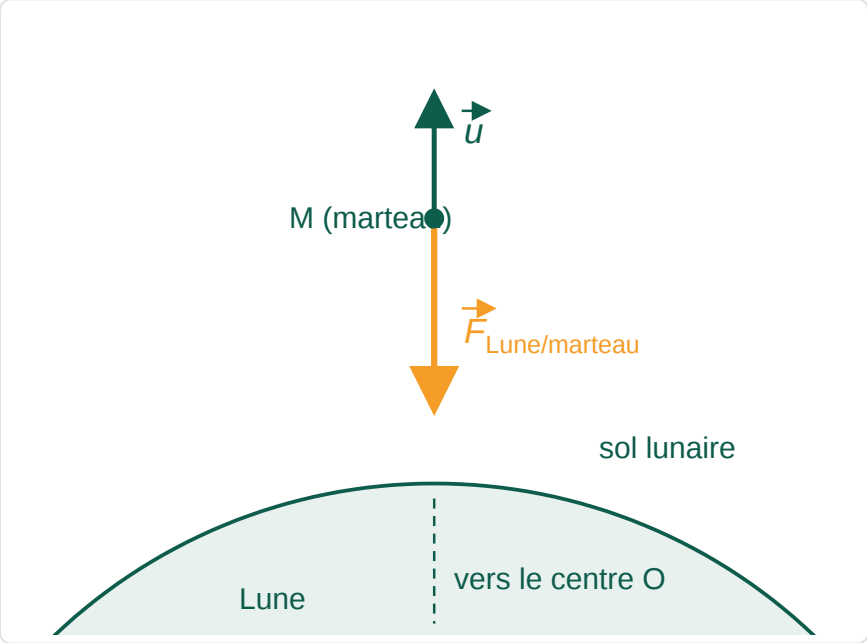
La Lune (masse M_L) attire le marteau (masse m) situé à la distance R_L de son centre. La force est dirigée vers le centre de la Lune, donc de sens opposé à $\vec{u}$.

Schéma : la force est tracée à partir du centre de masse M du marteau, verticale, vers le sol lunaire.

$$\overrightarrow{F}_{\text{Lune/marteau}} = -G\frac{M_L\, m}{R_L^2}\vec{u}$$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » : $\vec{u}$ pointe vers l'extérieur de la Lune alors que la force est attractive. Sur le schéma, la flèche part du marteau, pas du sol.

COMPRENDRE
Le marteau tombe de 1,43 m, hauteur négligeable devant $R_L = 1{,}74 \times 10^6$ m : la distance au centre reste égale à R_L et la force garde la même valeur pendant toute la chute.



1 · Force exercée par la Lune sur le marteau (sans souci d'échelle)

2 Montrer que le champ de pesanteur lunaire, au lieu où se trouve le marteau, s'écrit $\vec{g}_L = -G\frac{M_L}{R_L^2}\vec{u}$.

Le poids du marteau sur la Lune, $\vec{P} = m\,\vec{g}_L$, est assimilé à la force gravitationnelle exercée par la Lune :

$$m\,\vec{g}_L = \overrightarrow{F}_{\text{Lune/marteau}} = -G\frac{M_L\, m}{R_L^2}\vec{u}$$

En divisant par m :

$$\vec{g}_L = \frac{\overrightarrow{F}_{\text{Lune/marteau}}}{m} = -G\frac{M_L}{R_L^2}\vec{u}$$

COMPRENDRE
La masse m se simplifie : le champ de pesanteur ne dépend que de l'astre (M_L, R_L), pas de l'objet. C'est pourquoi le marteau et la plume tombent ensemble.

3 Montrer que, pendant la chute, $\vec{a} = \vec{g}_L$. Problème à résoudre : à partir de la modélisation $y = A\,t^2 + B\,t + C$, déterminer la masse de la Lune M_L et commenter le résultat.

Données utiles $A = 0{,}865\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ en valeur absolue ; $B = -0{,}15\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $C = 1{,}43$ m ; $G = 6{,}67\times10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$; $R_L = 1{,}74\times10^6$ m ; valeur de référence $M_L = 7{,}34\times10^{22}$ kg

Système {marteau}, de masse m constante ; référentiel lunaire supposé galiléen. Il n'y a pas d'atmosphère sur la Lune : la seule force est le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}_L$ (chute libre).

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g}_L = m\,\vec{a}$, d'où $\vec{a} = \vec{g}_L$.

Problème à résoudre

Équation horaire. L'axe (Oy) est vertical vers le haut, comme $\vec{u}$: $a_y = -g_L$ avec $g_L = G\dfrac{M_L}{R_L^2}$.

Par primitives successives, avec $v_y(0) = -v_0$ et $y(0) = y_0$:

$$v_y = -g_L\,t - v_0 \qquad y = -\tfrac{1}{2}\,g_L\,t^2 - v_0\,t + y_0$$

Identification avec le modèle. La parabole du graphe est tournée vers le bas : le coefficient de t^2 est négatif, $A = -0{,}865\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (le sujet l'écrit sans son signe). Alors $-\frac{1}{2}\,g_L = A$:

$$g_L = -2A = 2\times0{,}865 = 1{,}73\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

On retrouve aussi $v_0 = 0{,}15\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $y_0 = 1{,}43$ m, cohérents avec l'énoncé.

Masse de la Lune. $g_L = G\dfrac{M_L}{R_L^2}$ donne $M_L = \dfrac{g_L\,R_L^2}{G}$:

$$M_L = \frac{1{,}73\times(1{,}74\times10^6)^2}{6{,}67\times10^{-11}} = 7{,}85\times10^{22}\ \text{kg}$$

Regard critique. Écart relatif avec la valeur de référence : $\dfrac{7{,}85-7{,}34}{7{,}34} = 0{,}069$, soit environ 7 %. L'ordre de grandeur est le bon et la valeur est proche de celle attendue. L'écart peut venir du pointage (image ancienne et peu nette, centre de masse du marteau difficile à repérer), de l'étalonnage des distances sur la vidéo et du petit nombre de points utilisés pour la modélisation.

$\vec{a} = \vec{g}_L$; $M_L = \dfrac{g_L\,R_L^2}{G} = 7{,}85\times10^{22}$ kg, à 7 % de la valeur de référence $7{,}34\times10^{22}$ kg.

PIÈGE
Écrire $g_L = A$ en oubliant le facteur $\frac{1}{2}$ de l'équation horaire, ou garder A positif : on obtiendrait une masse deux fois trop petite ou une pesanteur dirigée vers le haut.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme A, R_L et G. Seul le coefficient de t^2 sert à trouver M_L ; B et C ne font que confirmer les conditions initiales.

MÉTHODE
Plus rapide : dériver deux fois le modèle, $v_y = 2A\,t + B$ puis $a_y = 2A$, et écrire $a_y = -g_L$. Dans un problème ouvert, annoncer les étapes, calculer, puis comparer à la valeur de référence par un écart relatif.

À LA CALCULATRICE

