Les supercondensateurs

Bac 2021 Centres étrangers Sujet 1 · Exercice 2 **5 points** **Durée conseillée 55 min**

1 Comparer la capacité du supercondensateur étudié aux valeurs usuelles des capacités des condensateurs du lycée ou de l'électronique.

Données utiles capacité annoncée par le constructeur : 400 F

Les condensateurs usuels ont des capacités allant du picofarad au millifarad (10^{-12} F à 10^{-3} F).

Même face au plus gros d'entre eux : $\dfrac{400}{10^{-3}} = 4 \times 10^{5}$.

La capacité du supercondensateur (400 F) est au moins plusieurs centaines de milliers de fois plus grande que celle d'un condensateur usuel.

COMPRENDRE
Le farad est une unité très grande : en travaux pratiques, on manipule des µF ou des nF. C'est ce qui justifie le préfixe « super ».

2 Justifier qualitativement les expressions « armatures de très grandes surfaces » et « très rapprochées » du texte de présentation.

Données utiles $C = \varepsilon \dfrac{S}{d}$

D'après $C = \varepsilon \dfrac{S}{d}$, la capacité est proportionnelle à la surface S et inversement proportionnelle à l'écartement d.

Pour atteindre une capacité aussi élevée avec un condensateur plan, il faut donc :

- augmenter S : des armatures de très grandes surfaces ;
- diminuer d : des armatures très rapprochées.

C augmente quand S augmente et quand d diminue : les deux expressions du texte sont justifiées.

MÉTHODE
« Justifier qualitativement » : aucun calcul, mais le sens de variation de la grandeur avec chaque paramètre de la formule, puis le lien avec le texte.

3 Donner la relation entre $i(t)$ et la dérivée de la charge $q(t)$ de l'armature A, puis la relation entre $i(t)$, C et la dérivée de $u_C(t)$.

Le courant arrive sur l'armature A : $i(t) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t)$.

La charge de l'armature A s'écrit $q(t) = C\,u_C(t)$, et C est constante, donc :

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) = C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t)$$

PIÈGE
Ces relations sans signe « $-$ » supposent la convention récepteur : la flèche de u_C pointe vers l'armature A, par laquelle entre i. C'est bien le cas sur la figure 1.

4 Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ est de la forme $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u_C = \dfrac{E}{\tau}$. Exprimer τ en fonction de R et de C.

Loi des mailles, interrupteur fermé (tension nulle aux bornes de l'ampèremètre) : $E = u_R(t) + u_C(t)$.

Loi d'Ohm : $u_R(t) = R\,i(t) = R\,C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t)$ d'après la question 3.

Donc $R\,C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) + u_C(t) = E$. En divisant par $R\,C$:

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{R\,C}\,u_C(t) = \frac{E}{R\,C}$$

On obtient la forme demandée, avec $\tau = R\,C$.

MÉTHODE
Toujours le même enchaînement : loi des mailles, loi d'Ohm, relation $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, puis division par le coefficient de la dérivée pour identifier τ.

5 Vérifier que les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $u_C(t) = A\,e^{-t/\tau} + E$. Déterminer l'expression de A pour la situation étudiée.

On dérive : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) = -\dfrac{A}{\tau}\,e^{-t/\tau}$.

On remplace dans le membre de gauche :

$$-\frac{A}{\tau}\,e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau}\left(A\,e^{-t/\tau} + E\right) = \frac{E}{\tau}$$

L'égalité est vraie à tout instant, quelle que soit la valeur de A : la fonction proposée est bien solution.

Condition initiale : le supercondensateur est déchargé, $u_C(0) = 0$, soit $A\,e^0 + E = 0$.

$A = -E$, donc $u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

PIÈGE
« Vérifier » ne demande pas de résoudre l'équation : on dérive la fonction proposée, on l'injecte, et on constate l'égalité. La constante A ne vient qu'ensuite, de la condition initiale.

6 Déterminer la valeur C_1 de la capacité du supercondensateur en explicitant la démarche suivie.

Données utiles $E = 2{,}5$ V ; $R = 2{,}0\ \Omega$; figure 2

À $t = \tau$: $u_C(\tau) = E\left(1 - e^{-1}\right) \approx 0{,}63\,E = 0{,}63 \times 2{,}5 \approx 1{,}6$ V.

Sur la figure 2, la courbe atteint 1,6 V à la date $\tau \approx 8{,}0 \times 10^2$ s.

Comme $\tau = R\,C_1$:

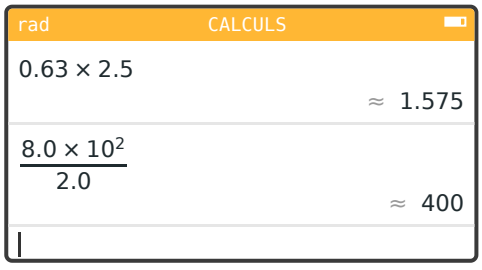
$$C_1 = \frac{\tau}{R} = \frac{8{,}0 \times 10^2}{2{,}0}$$

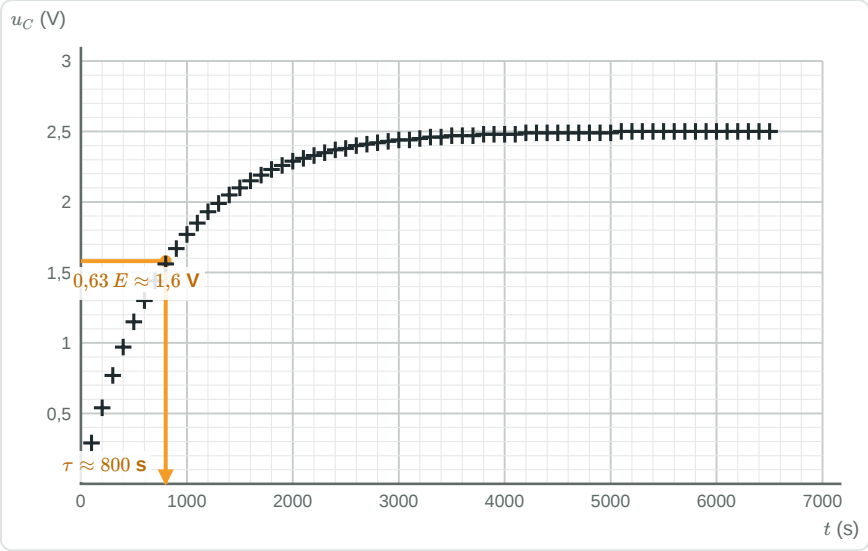
$C_1 \approx 4{,}0 \times 10^2$ F

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme E et R. La lecture graphique est peu précise (une graduation représente 500 s) : toute valeur de τ entre 750 s et 850 s est recevable.

MÉTHODE
Autre possibilité : tracer la tangente à l'origine, qui coupe l'asymptote $u_C = E$ à la date $t = \tau$. La lecture à 63 % est plus fiable sur des points expérimentaux.

À LA CALCULATRICE





6 · Figure 2 du sujet, avec la lecture de la constante de temps

7 Écrire de manière appropriée le résultat de la mesure du temps caractéristique avec son incertitude-type.

Données utiles moyenne $\overline{\tau_2} = 814{,}2827$ s ; incertitude-type donnée par la calculatrice : 1,175 s

On arrondit l'incertitude-type à deux chiffres significatifs : $u(\overline{\tau_2}) = 1{,}2$ s.

Elle porte sur le dixième de seconde : la moyenne s'arrondit donc au dixième, $\overline{\tau_2} = 814{,}3$ s.

$\overline{\tau_2} = 814{,}3$ s avec $u(\overline{\tau_2}) = 1{,}2$ s

PIÈGE
Recopier $814{,}2827$ s : les chiffres situés au-delà du dixième de seconde n'ont aucun sens puisque l'incertitude dépasse déjà la seconde.

COMPRENDRE
Avec un seul chiffre significatif pour l'incertitude, arrondie par excès, on écrirait $\overline{\tau_2} = 814$ s et $u(\overline{\tau_2}) = 2$ s : cette écriture est acceptée aussi.

8 Déterminer la valeur de la capacité C_2 du supercondensateur ainsi que son incertitude-type.

Données utiles $\overline{\tau_2} = 814{,}3$ s et $u(\overline{\tau_2}) = 1{,}2$ s (Q7) ; $R = 2{,}0\ \Omega$; $u(R) = 0{,}1\ \Omega$

$$C_2 = \frac{\overline{\tau_2}}{R} = \frac{814{,}3}{2{,}0} = 407 \text{ F}$$

Avec la relation donnée par le sujet :

$$u(C_2) = 407 \times \sqrt{\left(\frac{0{,}1}{2{,}0}\right)^2 + \left(\frac{1{,}2}{814{,}3}\right)^2} = 20 \text{ F}$$

L'incertitude porte sur les dizaines de farads : on arrondit C_2 à la dizaine.

$C_2 = 4{,}1 \times 10^2$ F avec $u(C_2) = 0{,}2 \times 10^2$ F

COMPRENDRE
L'incertitude relative sur R (5 %) écrase celle sur $\overline{\tau_2}$ (0,15 %) : répéter la mesure du temps n'améliore plus rien, il faudrait une résistance mieux connue.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{814.3}{2.0} \approx 407.15$

$407.15 \times \sqrt{\left(\frac{0.1}{2.0}\right)^2 + \left(\frac{1.2}{814.3}\right)^2} \approx 20.36634$

9 Comparer la valeur C_2 mesurée à la valeur de référence du constructeur à l'aide du quotient $\dfrac{|C_2 - C_{\text{réf}}|}{u(C_2)}$. Conclure.

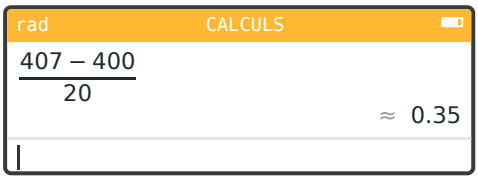
Données utiles $C_{\text{réf}} = 400$ F ; $C_2 = 407$ F et $u(C_2) = 20$ F (Q8)

$$\frac{|C_2 - C_{\text{réf}}|}{u(C_2)} = \frac{|407 - 400|}{20} = 0{,}35$$

Le quotient est inférieur à 2 : l'écart entre la mesure et la valeur de référence est plus petit que l'incertitude-type.

Quotient $\approx 0{,}35 < 2$: la valeur mesurée C_2 est compatible avec la capacité de 400 F annoncée par le constructeur.

À LA CALCULATRICE



COMPRENDRE

Avec la valeur arrondie $C_2 = 4{,}1 \times 10^2$ F, le quotient vaut 0,5 : la conclusion est la même. Le seuil habituel de compatibilité est 2.