Le jeu du cornhole

Bac 2021 Métropole Mars Sujet 1 · Exercice 1 **10 points** **Durée conseillée 1 h 45**

1.1 Identifier les grandeurs calculées aux lignes 15, 16, 17 et 18 de l'extrait de programme Python (figure 2).

- Ligne 15 : la valeur de la vitesse du sac, $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$.
- Ligne 16 : l'énergie cinétique, $E_c = \frac{1}{2} m v^2$.
- Ligne 17 : l'énergie potentielle de pesanteur, $E_{pp} = m g z$.
- Ligne 18 : l'énergie mécanique, $E_m = E_c + E_{pp}$.

Lignes 15 à 18 : `v`, `Ec`, `Epp`, `Em`.

COMPRENDRE
En Python, `2` **élève au carré et** `(1/2)` prend la racine carrée. La ligne 15 applique donc le théorème de Pythagore aux deux coordonnées de la vitesse.

1.2.1 En justifiant, attribuer à chaque série de la figure 3 l'énergie qui lui correspond.

Les mesures portent sur la phase de montée du sac.

- L'altitude z augmente, donc $E_{pp} = m g z$ augmente : c'est la **série 3**, la seule qui croît.
- Le sac ralentit en montant, donc E_c diminue ; la **série 2** décroît.
- $E_m = E_c + E_{pp}$ est à chaque date la somme des deux autres : c'est la **série 1**, la plus haute (à $t = 0$: $17{,}8 + 3{,}8 \approx 21{,}6$ J).

Série 1 : E_m ; série 2 : E_c ; série 3 : E_{pp}.

PIÈGE
Les séries 1 et 2 décroissent toutes les deux : le sens de variation ne suffit pas à les départager. C'est la somme des deux autres courbes qui désigne l'énergie mécanique.

1.2.2 Expliquer en quoi les résultats expérimentaux montrent que l'action de l'air sur le sac n'est pas négligeable devant le poids.

Si le sac n'était soumis qu'à son poids, force conservative, son énergie mécanique resterait constante.

Or la série 1 décroît nettement : E_m passe d'environ $21{,}6$ J à environ $19{,}3$ J en $0{,}53$ s, soit une perte voisine de $2{,}3$ J (environ 10 %).

E_m diminue : une force non conservative, l'action de l'air, effectue un travail résistant qui n'est pas négligeable.

COMPRENDRE
La variation d'énergie mécanique est égale au travail des forces non conservatives. Ce travail est ici négatif : l'air freine le sac.

1.2.3 Estimer la valeur de la vitesse initiale v_0 du centre de masse du sac.

Données utiles $m = 440$ g $= 0{,}440$ kg ; figure 3, série 2 à $t = 0$: $E_{c0} \approx 17{,}8$ J

À $t = 0$: $E_{c0} = \frac{1}{2} m v_0^2$, donc $v_0 = \sqrt{\frac{2 E_{c0}}{m}}$.

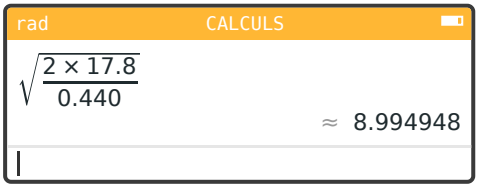
$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 17{,}8}{0{,}440}} = 8{,}99 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$v_0 \approx 9{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

PIÈGE
La masse doit être en kilogrammes : avec $m = 440$, on trouve $0{,}28 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, valeur absurde pour un lancer à 8 m.

COMPRENDRE
Une lecture graphique ne garantit pas le troisième chiffre : on annonce $9{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Les premières valeurs des tableaux `vx` et `vz` donnent le même résultat.

À LA CALCULATRICE



1.2.4 Estimer la valeur de l'altitude initiale H du centre de masse du sac. Commenter.

Données utiles $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $m = 0{,}440$ kg ; figure 3, série 3 à $t = 0$: $E_{pp0} \approx 3{,}8$ J

À $t = 0$: $E_{pp0} = m\,g\,H$, donc $H = \dfrac{E_{pp0}}{m\,g}$.

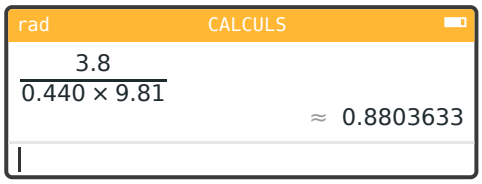
$$H = \frac{3{,}8}{0{,}440 \times 9{,}81} = 0{,}88\ \text{m}$$

Cette valeur est cohérente : elle est proche de la première valeur du tableau `z` (0,869 m) et correspond à la hauteur de la main d'un joueur qui lance bras tendu vers le bas, à peu près à mi-hauteur du corps (figure 1).

$H \approx 0{,}88$ m

COMPRENDRE
$E_{pp} = m\,g\,z$ suppose l'énergie potentielle nulle au niveau du sol ($z = 0$), ce que fait le programme à la ligne 17.

À LA CALCULATRICE



2.1 Déterminer les expressions littérales des coordonnées a_x et a_z du vecteur accélération du centre de masse du sac.

Système : {sac}, de masse m constante. Référentiel terrestre supposé galiléen. Seule force (frottements non pris en compte) : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, d'où $\vec{a} = \vec{g}$.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical, dirigé vers le bas, alors que l'axe (Oz) est orienté vers le haut.

$a_x = 0$ et $a_z = -g$

MÉTHODE
Tout mouvement dans un champ uniforme commence ainsi : système, référentiel galiléen, bilan des forces, deuxième loi de Newton, puis projection sur les axes du sujet.

2.2 En déduire les expressions littérales des équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ de la position du centre de masse du sac.

Comme $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives de a_x et a_z :

$$v_x(t) = C_1 \qquad v_z(t) = -g\,t + C_2$$

À $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$ de coordonnées $v_0\cos\alpha$ et $v_0\sin\alpha$, donc $C_1 = v_0\cos\alpha$ et $C_2 = v_0\sin\alpha$:

$$v_x(t) = v_0\cos\alpha \qquad v_z(t) = -g\,t + v_0\sin\alpha$$

Comme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$, on intègre une seconde fois :

$$x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t + C_3 \qquad z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t + C_4$$

À $t = 0$, le sac est en $x = 0$ et $z = H$, donc $C_3 = 0$ et $C_4 = H$.

$x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t$ et $z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t + H$

PIÈGE
Oublier la constante $C_4 = H$: le sac ne part pas de l'origine O mais d'un point situé sur l'axe (Oz), à la hauteur H.

MÉTHODE
Chaque primitive apporte une constante, fixée aussitôt par la condition initiale correspondante : la vitesse à $t = 0$ après la première intégration, la position à $t = 0$ après la seconde.

2.3 Montrer que la trajectoire a pour équation $z(x) = -\frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{v_0^2\cos^2(\alpha)} + x\tan(\alpha) + H$. Qualifier cette trajectoire.

On élimine le temps : $x = v_0\cos(\alpha)\,t$ donne $t = \dfrac{x}{v_0\cos\alpha}$.

On reporte dans $z(t)$:

$$z(x) = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\sin\alpha \times \frac{x}{v_0\cos\alpha} + H$$

Comme $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$:

$z(x) = -\frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{v_0^2\cos^2(\alpha)} + x\tan(\alpha) + H$: expression attendue.

C'est un polynôme du second degré en x : la trajectoire est une portion de **parabole**.

COMPRENDRE
Le coefficient de x^2 est négatif : la parabole a ses branches tournées vers le bas, ce qui correspond bien à un sac qui monte puis retombe.

2.4 Indiquer les paramètres initiaux de lancement sur lesquels le joueur peut agir et qui jouent un rôle dans la réussite d'un lancer à trois points.

L'équation de la trajectoire ne dépend que de g, v_0, α et H. Le joueur ne peut pas changer g.

Le joueur agit sur la valeur v_0 de la vitesse initiale, sur l'angle de tir α et sur la hauteur initiale H.

COMPRENDRE
La masse m du sac ne figure pas dans l'équation : sans frottement, elle n'a aucune influence sur la trajectoire.

2.5 Déterminer le nombre de points marqués par le joueur pour le premier lancer, de trajectoire $z(x) = -0{,}0842\,x^2 + 0{,}625\,x + 0{,}880$.

Données utiles $d = 8{,}0$ m ; figure 4 : planche longue de 122 cm, trou de diamètre 16 cm commençant à 91 cm du bord d'entrée

Le sac touche la planche (quasi horizontale, au niveau du sol) lorsque $z = 0$:

$$-0{,}0842\,x^2 + 0{,}625\,x + 0{,}880 = 0$$

$\Delta = 0{,}625^2 + 4 \times 0{,}0842 \times 0{,}880 = 0{,}687$, positif : deux solutions, $x_1 = -1{,}21$ m et $x_2 = 8{,}63$ m. Seule la solution positive convient : le sac retombe en $x = 8{,}63$ m.

Positions sur l'axe (Ox) :

- planche : de $8{,}00$ m à $8{,}00 + 1{,}22 = 9{,}22$ m ;
- trou : de $8{,}00 + 0{,}91 = 8{,}91$ m à $8{,}91 + 0{,}16 = 9{,}07$ m.

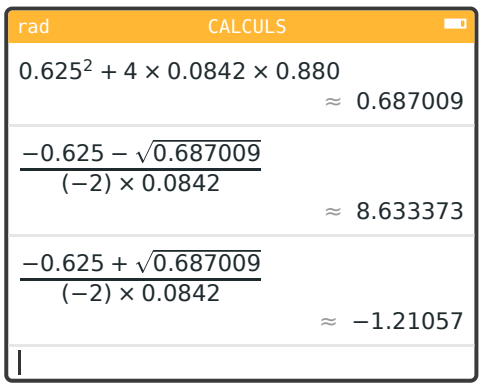
On a $8{,}00 < 8{,}63 < 8{,}91$: le sac retombe sur la planche, avant le trou.

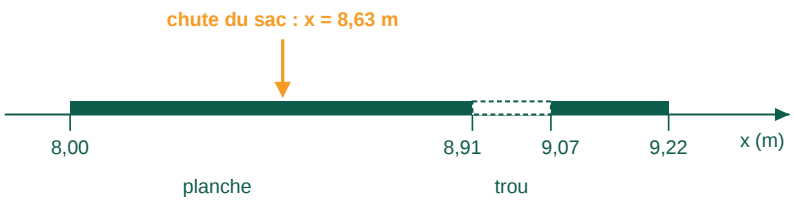
Le joueur marque **1 point**.

PIÈGE
Comparer $8{,}63$ m aux dimensions de la planche sans ajouter d : les cotes de la figure 4 partent du bord de la planche, pas de l'origine O.

MÉTHODE
Point de chute d'un projectile : poser $z = 0$ dans l'équation de la trajectoire, résoudre l'équation du second degré, garder la racine positive.

À LA CALCULATRICE





2.5 · Point de chute du premier lancer, repéré sur l'axe (Ox)

2.6 Second lancer, avec le même angle α et la même hauteur H : déterminer une valeur possible de la nouvelle vitesse initiale v_0 pour que le sac tombe directement dans le trou. Commenter.

Données utiles $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; premier lancer : $z(x) = -0{,}0842\,x^2 + 0{,}625\,x + 0{,}880$; trou entre $8{,}91$ m et $9{,}07$ m (Q2.5)

Paramètres conservés. Par identification avec l'équation littérale (Q2.3) : $H = 0{,}880$ m et $\tan\alpha = 0{,}625$, donc $\alpha = 32{,}0^\circ$.

Point visé. Le centre du trou : $x_T = 8{,}91 + 0{,}08 = 8{,}99$ m, avec $z = 0$.

Vitesse nécessaire. $z(x_T) = 0$ s'écrit $\dfrac{g\,x_T^2}{2\,v_0^2\cos^2\alpha} = x_T\tan\alpha + H$, d'où

$$v_0 = \sqrt{\frac{g\,x_T^2}{2\cos^2(\alpha)\left(x_T\tan\alpha + H\right)}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{9{,}81\times 8{,}99^2}{2\times\cos^2(32{,}0^\circ)\times(8{,}99\times 0{,}625 + 0{,}880)}} = 9{,}21\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Commentaire. Pour le premier lancer, le coefficient $0{,}0842 = \dfrac{g}{2\,v_0^2\cos^2\alpha}$ donne $v_0 = 9{,}00\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, en accord avec la question 1.2.3. Il suffit donc d'augmenter la vitesse d'environ 2 % ($0{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) pour passer d'un point à trois points. Le même calcul aux bords du trou donne $9{,}16$ et $9{,}26\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: la vitesse doit être dosée à moins de 1 % près, ce qui explique la difficulté du jeu.

$v_0 \approx 9{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (toute valeur entre $9{,}16$ et $9{,}26\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ convient)

PIÈGE
Reprendre le coefficient $0{,}0842$ du premier lancer : il contient l'ancienne vitesse. Seuls $\tan\alpha = 0{,}625$ et $H = 0{,}880$ m sont conservés.

COMPRENDRE
Ce modèle néglige l'action de l'air, alors que la partie 1 a montré qu'elle ne l'est pas : en réalité, il faut lancer un peu plus fort que la valeur calculée.

MÉTHODE
Question ouverte : annoncer les étapes (paramètres connus, point visé, relation utilisée), puis calculer. Une démarche claire rapporte des points même si le calcul n'aboutit pas.

À LA CALCULATRICE

