Water bottle flip

Bac 2021 Asie Sujet 2 · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

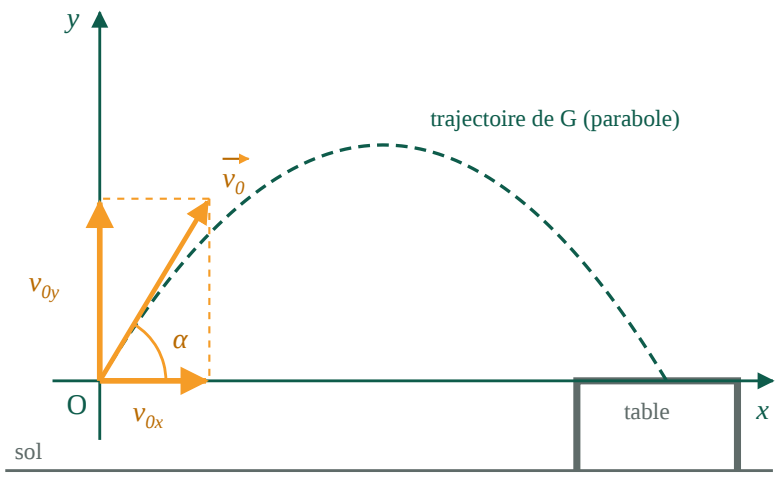
1 Représenter, sans souci d'échelle, le système d'axes (Oxy), le vecteur $\vec{v}_0$, l'angle α, les coordonnées v_{0x} et v_{0y} et l'allure de la trajectoire du centre de masse.

Le vecteur $\vec{v}_0$ part de O, est incliné de l'angle α au-dessus de l'axe (Ox) et est tangent à la trajectoire en O. Ses coordonnées sont ses projections sur les axes.

La trajectoire est un arc de parabole qui monte, passe par un sommet puis redescend vers la table.

Schéma ci-dessous, avec $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ et $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$.

PIÈGE
L'angle α se marque entre l'axe horizontal (Ox) et $\vec{v}_0$, pas entre $\vec{v}_0$ et la verticale. La trajectoire doit quitter O en suivant la direction de $\vec{v}_0$.



1 · Repère, vecteur $\vec{v}_0$, angle α, coordonnées v_{0x} et v_{0y}, allure de la trajectoire

2 À partir des données expérimentales et de la figure 2, vérifier que la valeur expérimentale v_0 de la vitesse initiale est proche de $3{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Données utiles $\tau = 40$ ms ; hauteur réelle de la bouteille : 18,8 cm ; mesures sur la figure 2 : $G_0G_1 \approx 1{,}7$ cm, bouteille $\approx 2{,}2$ cm

La vitesse initiale est assimilée à la vitesse moyenne entre les deux premières positions : $v_0 \approx \dfrac{G_0G_1}{\tau}$.

Échelle : 2,2 cm sur la figure représentent 18,8 cm. Distance réelle :

$$G_0G_1 = \frac{1{,}7 \times 18{,}8}{2{,}2} = 14{,}5\ \text{cm} = 0{,}145\ \text{m}$$

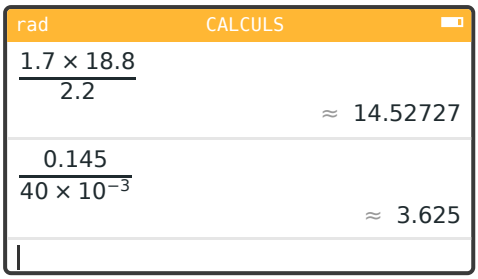
$$v_0 = \frac{0{,}145}{40 \times 10^{-3}} = 3{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$v_0 \approx 3{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: la valeur annoncée ($3{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) est bien retrouvée.

PIÈGE
Oublier l'échelle, ou laisser τ en millisecondes et la distance en centimètres. La vitesse s'obtient en mètres par seconde avec $\tau = 40 \times 10^{-3}$ s.

COMPRENDRE
Les longueurs mesurées à la règle n'ont que deux chiffres significatifs : le résultat aussi. Selon l'impression du sujet, on trouve entre 3,5 et $3{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, ce qui reste « proche de 3,6 ».

À LA CALCULATRICE



3 Proposer une méthode permettant de déterminer expérimentalement la valeur de l'angle α.

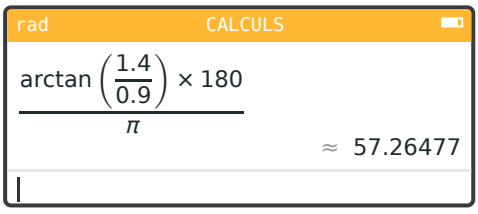
Le vecteur $\vec{v}_0$ a la direction de la droite (G_0G_1). Sur la figure 2, on trace cette droite et on mesure au rapporteur l'angle qu'elle fait avec l'axe (Ox).

Sans rapporteur : on note H le projeté de G_1 sur l'axe (Ox). Dans le triangle G_0HG_1, rectangle en H, on mesure G_0H et HG_1 à la règle, puis :

$$\tan\alpha = \frac{HG_1}{G_0H}, \text{ soit } \alpha = \arctan\left(\frac{HG_1}{G_0H}\right)$$

COMPRENDRE
Un angle ne dépend pas de l'échelle : les longueurs mesurées sur la figure suffisent. Avec $HG_1 \approx 1{,}4$ cm et $G_0H \approx 0{,}9$ cm, on obtient $\alpha \approx 57^\circ$, proche des 59° retenus par le sujet.

À LA CALCULATRICE



4 En précisant la loi utilisée, donner les expressions des coordonnées $a_x(t)$ et $a_y(t)$ du vecteur accélération du centre de masse.

Système : {bouteille + eau}, de masse m constante. Référentiel terrestre, supposé galiléen.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$ seulement, l'action de l'air étant négligée.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical, dirigé vers le bas, et l'axe (Oy) est orienté vers le haut :

$$a_x(t) = 0 \text{ et } a_y(t) = -g$$

PIÈGE
Oublier le système, le référentiel galiléen ou le nom de la loi : la question les demande explicitement. Le signe « $-$ » de a_y vient de l'axe (Oy) orienté vers le haut.

5 En déduire les coordonnées $v_x(t)$ et $v_y(t)$ du vecteur vitesse, puis montrer que les équations horaires sont $x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t$ et $y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t$.

Comme $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives de a_x et a_y :

$v_x(t) = C_1$ et $v_y(t) = -g\,t + C_2$.

À $t = 0$, $\vec{v}(0) = \vec{v_0}$ de coordonnées $v_0\cos\alpha$ et $v_0\sin\alpha$, donc $C_1 = v_0\cos\alpha$ et $C_2 = v_0\sin\alpha$:

$$v_x(t) = v_0\cos\alpha \qquad v_y(t) = -g\,t + v_0\sin\alpha$$

Comme $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$, on prend de nouveau les primitives :

$x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t + C_3$ et $y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t + C_4$.

À $t = 0$, G est en O : $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$, donc $C_3 = 0$ et $C_4 = 0$.

$x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t$ et $y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t$: ce sont les équations annoncées.

PIÈGE
Intervertir $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$: le cosinus va avec l'axe adjacent à l'angle, ici (Ox).

MÉTHODE
Toujours le même enchaînement : accélération, primitive, constante fixée par la vitesse initiale ; puis vitesse, primitive, constante fixée par la position initiale. Chaque constante doit être justifiée par une condition initiale écrite.

6 Associer chacun des tracés (a) et (b) du graphique à $x(t)$ et $y(t)$.

$x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t$ est proportionnelle à t : sa représentation est une droite passant par l'origine. C'est le tracé (b), en pointillés.

$y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t$ est un polynôme du second degré en t, de coefficient négatif devant t^2 : sa représentation est une parabole tournée vers le bas. C'est le tracé (a).

Tracé (b) : $x(t)$; tracé (a) : $y(t)$.

COMPRENDRE
Le programme le confirme : ligne 17, `'k--'` trace x en tirets noirs ; ligne 18, `'k'` trace y en trait plein.

7 Préciser ce qui est caché par le rectangle gris dans la ligne 15 du programme.

La ligne 15 calcule $y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t$. Le rectangle masque le facteur placé devant `*t`, c'est-à-dire $v_0\sin\alpha$, avec l'angle converti en radians comme à la ligne 14.

Expression cachée : `v0*sin(alpha*pi/180)`

PIÈGE
Écrire `sin(alpha)` sans conversion : l'angle est saisi en degrés (ligne 8) alors que la fonction `sin` de Python attend des radians, d'où le facteur `pi/180`.

8 Estimer la durée du mouvement de la bouteille obtenue par la modélisation, sachant que G se trouve à environ 2 cm du fond de la bouteille lorsqu'elle se pose sur la table.

Données utiles plateau de la table à la hauteur de l'axe (Ox) (figure 1) ; graphique $y(t)$, tracé (a)

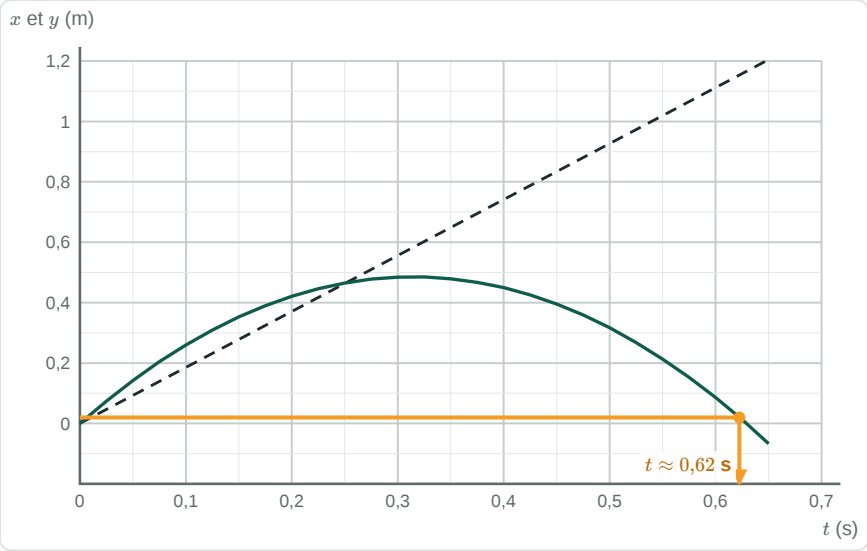
Le plateau de la table est au niveau $y = 0$. Quand la bouteille s'y pose, G est 2 cm plus haut : $y = 0{,}02$ m.

On cherche sur le tracé (a) la date, autre que le départ, où y redescend à $0{,}02$ m, c'est-à-dire juste avant que la courbe ne recoupe l'axe des abscisses.

Durée du mouvement d'après le modèle : $t_{\text{mod}} \approx 0{,}62$ s

PIÈGE
Retenir $t = 0$ s ou la première date où $y = 0{,}02$ m, juste après le lancer : c'est la phase de descente qui correspond à l'arrivée sur la table.

COMPRENDRE
Vérification par le calcul : $y(t) = 0{,}02$ m est une équation du second degré dont la plus grande solution vaut $0{,}62$ s. Avec $y = 0$, on aurait $t = \frac{2\,v_0\sin\alpha}{g} = 0{,}63$ s : les 2 cm changent peu le résultat.



8 · Graphique du sujet : la courbe (a) repasse par $y = 0{,}02$ m à $t \approx 0{,}62$ s

À LA CALCULATRICE

deg CALCULS

$$\frac{3.6 \times \sin(59°) + \sqrt{(3.6 \times \sin(59°))^2 - 2 \times 9.81 \times 0.02}}{9.81} \approx 0.6225641$$

9 Proposer au moins une explication de l'écart entre la durée réelle $\Delta t = (0{,}50 \pm 0{,}05)$ s et la durée obtenue par la modélisation.

Données utiles $t_{\text{mod}} \approx 0{,}62$ s (Q8)

La durée réelle est comprise entre $0{,}45$ s et $0{,}55$ s. La durée du modèle, $0{,}62$ s, est en dehors de cet intervalle : l'écart n'est pas dû à la seule incertitude sur Δt.

Explications possibles :

- les valeurs v_0 et α entrées dans le programme proviennent d'un pointage peu précis (deux positions, petites longueurs) : une valeur un peu surestimée de $v_0 \sin \alpha$ allonge la durée calculée ;
- l'action de l'air est négligée dans le modèle ;
- l'eau se déplace dans la bouteille qui tourne : le centre de masse n'occupe pas une position fixe dans la bouteille, ce qui fausse le pointage et la hauteur d'arrivée.

Le modèle surestime la durée ($0{,}62$ s contre $0{,}50 \pm 0{,}05$ s) : conditions initiales imprécises, action de l'air négligée, eau en mouvement.

COMPRENDRE

Pour comparer une valeur calculée à une mesure, on regarde si elle appartient à l'intervalle $[\Delta t - u\,;\ \Delta t + u]$. Ici ce n'est pas le cas : il faut remettre en cause les hypothèses ou les données du modèle.

10 À l'aide du modèle, déterminer la distance à laquelle la bouteille tombe sur la table par rapport à l'origine du repère. Indiquer ce que l'on peut prévoir pour la distance réelle.

Données utiles $t_{\text{mod}} \approx 0{,}62$ s (Q8) ; $v_0 = 3{,}6$ m · s^{-1} ; $\alpha = 59^\circ$

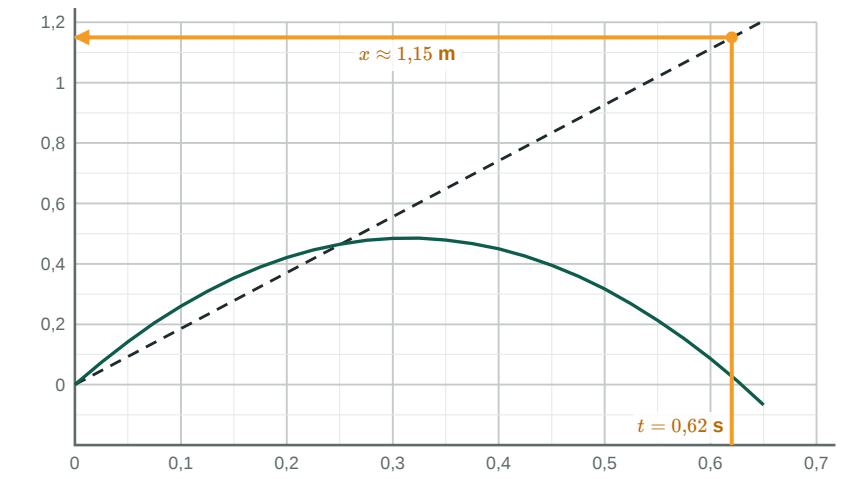
La distance cherchée est l'abscisse de G à la date t_{mod}. Sur le tracé (b), à $t = 0{,}62$ s, on lit $x \approx 1{,}15$ m. Par le calcul :

$$x(t_{\text{mod}}) = v_0 \cos(\alpha)\, t_{\text{mod}} = 3{,}6 \times \cos(59^\circ) \times 0{,}62 = 1{,}1 \text{ m}$$

Le mouvement réel dure moins longtemps ($0{,}50$ s au lieu de $0{,}62$ s) : la bouteille avance moins longtemps et la distance réelle est plus petite que celle du modèle, de l'ordre de $3{,}6 \times \cos(59^\circ) \times 0{,}50 = 0{,}93$ m si la vitesse horizontale est celle du modèle.

Modèle : $x \approx 1{,}1$ m (lecture : $1{,}15$ m). Distance réelle prévue plus faible, voisine de $0{,}9$ m.

PIÈGE
Chercher l'abscisse où la droite (b) coupe un axe, ou lire x au sommet de la parabole. La distance se lit sur (b) à la date d'arrivée trouvée à la question 8.



10 · Lecture sur la droite (b) à $t = 0{,}62$ s

À LA CALCULATRICE

