# La planète Mercure

Bac 2022 Polynésie Jour 2 · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

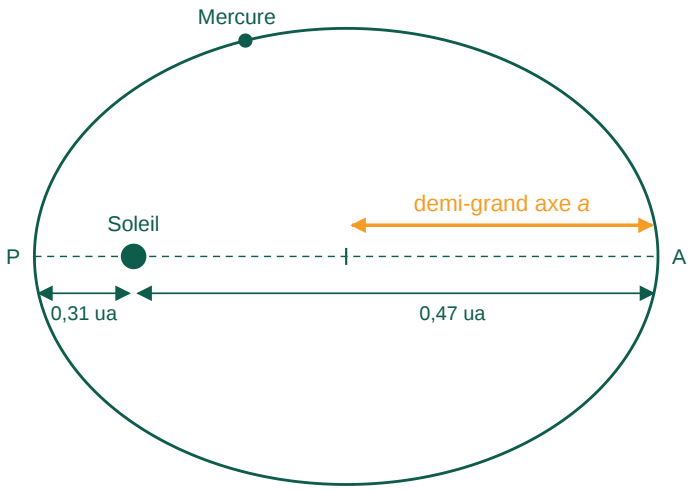
**1** Énoncer la première loi de Kepler (loi des orbites). Représenter l'allure de la trajectoire de Mercure autour du Soleil, avec la position du Soleil et le demi-grand axe.

Première loi de Kepler : dans le référentiel héliocentrique, le centre d'une planète décrit une ellipse dont le centre du Soleil occupe l'un des foyers.

Sur le schéma, P est le point de l'orbite le plus proche du Soleil (périhélie) et A le plus éloigné (aphélie). Le grand axe est le segment [PA].

L'orbite de Mercure est une **ellipse** dont le Soleil est un **foyer** ; le demi-grand axe $a$ vaut la moitié de PA.

**PIÈGE**
Placer le Soleil au centre de l'ellipse. Il est sur le grand axe, mais décalé : c'est pour cela que la distance Soleil-Mercure varie.




**1** · Orbite de Mercure (sans souci d'échelle) : le Soleil est à un foyer

**2** À l'aide du schéma et du texte introductif, montrer par un calcul simple que le demi-grand axe vaut 0,39 ua.

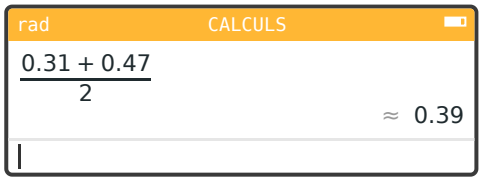
**Données utiles** distance Soleil-Mercure comprise entre 0,31 ua et 0,47 ua

Le grand axe passe par le Soleil et relie le périhélie P (0,31 ua du Soleil) à l'aphélie A (0,47 ua du Soleil) :

$$2a = 0{,}31 + 0{,}47 = 0{,}78 \text{ ua}$$

$a = \dfrac{0{,}78}{2} = 0{,}39$ ua : c'est la valeur attendue.

**À LA CALCULATRICE**



**3** Énoncer la deuxième loi de Kepler (loi des aires). L'appliquer pour déterminer dans quelle partie de sa trajectoire Mercure atteint la vitesse de $39\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$.

**Données utiles** vitesse comprise entre $39\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ et $59\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$

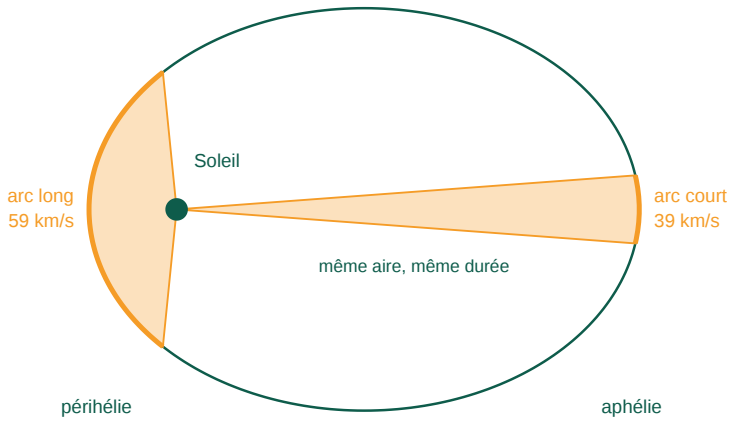
Deuxième loi de Kepler : le segment qui joint le centre du Soleil à celui de la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.

Loin du Soleil, ce segment est long : un petit arc de trajectoire suffit pour balayer la même aire que près du Soleil, où le segment est court et l'arc parcouru plus grand. Pour une même durée $\Delta t$, la distance parcourue est donc la plus petite au voisinage de l'aphélie, et la vitesse $v = \dfrac{\text{arc}}{\Delta t}$ y est minimale.

Or $39\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ est la plus petite vitesse de Mercure.

Mercure a la vitesse de $39\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ à l'**aphélie**, lorsqu'elle est la plus éloignée du Soleil (0,47 ua).

**COMPRENDRE**
À l'inverse, la vitesse maximale de $59\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ est atteinte au périhélie. La planète accélère en se rapprochant du Soleil, puis ralentit en s'éloignant.




**3** · Deux aires égales balayées pendant la même durée

**4** Donner la signification de $T$ et $a$ pour Mercure. Justifier, avec la troisième loi de Kepler, que Mercure parcourt son orbite en un peu moins de trois mois.

**Données utiles** $\dfrac{T^2}{a^3} = k$ avec $k = 2{,}9 \times 10^{-19}\ \text{s}^2\cdot\text{m}^{-3}$ ; $a = 0{,}39$ ua (Q2) ; $1\ \text{ua} = 1{,}5 \times 10^{11}\ \text{m}$

$T$ est la période de révolution de Mercure : la durée d'un tour complet autour du Soleil. $a$ est le demi-grand axe de son orbite.

$T^2 = k\,a^3$, donc $T = \sqrt{k\,a^3}$, avec $a$ en mètres : $a = 0{,}39 \times 1{,}5 \times 10^{11}\ \text{m}$.

$$T = \sqrt{2{,}9 \times 10^{-19} \times (0{,}39 \times 1{,}5 \times 10^{11})^3} = 7{,}6 \times 10^{6}\ \text{s}$$

En jours : $T = \dfrac{7{,}6 \times 10^{6}}{24 \times 3600} = 88\ \text{j}$, alors que trois mois durent environ 90 jours.

$T = 7{,}6 \times 10^{6}\ \text{s} \approx 88\ \text{j}$ : un peu moins de trois mois.

**PIÈGE**
Laisser $a$ en unités astronomiques. La constante $k$ est en $\text{s}^2\cdot\text{m}^{-3}$ : $a$ doit être en mètres, et $T$ sort en secondes.

**COMPRENDRE**
Deux chiffres significatifs, comme pour $k$, $a$ et l'unité astronomique : le résultat ne peut pas être plus précis que les données.

**À LA CALCULATRICE**

rad CALCULS

$$\sqrt{2.9 \times 10^{-19} \times (0.39 \times 1.5 \times 10^{11})^3} \approx 7619611$$

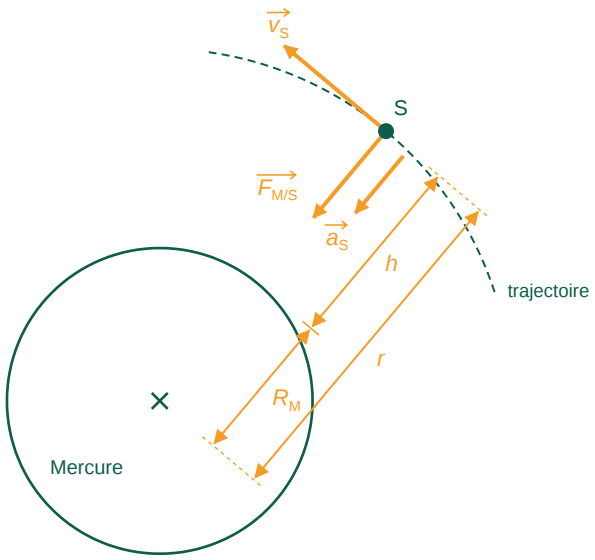
$$\frac{\sqrt{2.9 \times 10^{-19} \times (0.39 \times 1.5 \times 10^{11})^3}}{24 \times 3600} \approx 88.18994$$

**5** Reproduire la figure 1 et y faire apparaître les distances $R_M$, $h$ et $r$, la force $\overrightarrow{F}_{M/S}$, la vitesse $\vec{v}_S$ et l'accélération $\vec{a}_S$ de la sonde.

- $R_M$ : du centre de Mercure à sa surface ; $h$ : de la surface à la sonde S ; $r$ : du centre de Mercure à S.
- $\overrightarrow{F}_{M/S}$ : appliquée en S, dirigée vers le centre de Mercure (comme $\vec{u}$ ).
- $\vec{v}_S$ : tangente à la trajectoire en S, dans le sens du mouvement.
- $\vec{a}_S$ : même direction et même sens que $\overrightarrow{F}_{M/S}$.

$r = R_M + h$ ; $\overrightarrow{F}_{M/S}$ et $\vec{a}_S$ pointent de S vers le centre de Mercure ; $\vec{v}_S$ est tangente à la trajectoire.

**PIÈGE**
Tracer $\vec{a}_S$ dans la direction de $\vec{v}_S$. L'accélération suit la force, pas le mouvement. Ne pas confondre non plus $r$ (depuis le centre) et $h$ (depuis la surface).




**5** · Figure 1 complétée

**6** Énoncer la deuxième loi de Newton, puis l'appliquer au système MESSENGER dans le référentiel mercurocentrique supposé galiléen. En déduire l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_S$.

Deuxième loi de Newton : dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures exercées sur un système de masse $m$ constante vaut $m$ fois l'accélération de son centre de masse : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$.

Système {MESSENGER}, de masse $m_S$ ; référentiel mercurocentrique galiléen ; seule force : l'attraction de Mercure, avec $r = R_M + h$ :

$$\vec{F}_{M/S} = \frac{G\,M\,m_S}{(R_M+h)^2}\,\vec{u}$$

La loi donne $m_S\,\vec{a}_S = \dfrac{G\,M\,m_S}{(R_M+h)^2}\,\vec{u}$, soit, en simplifiant par $m_S$ :

$$\boxed{\vec{a}_S = \frac{G\,M}{(R_M+h)^2}\,\vec{u}}$$

**PIÈGE**
Écrire $h^2$ ou $R_M^2$ au dénominateur. La distance entre les centres de masse est $R_M + h$.

**COMPRENDRE**
La masse de la sonde disparaît : l'accélération ne dépend que de la masse de Mercure et de la distance à son centre. Mesurer $a_S$ revient donc à « peser » Mercure.

**7** Montrer que la valeur de l'accélération mesurée à l'altitude $h$ conduit à une masse de Mercure $M = 3{,}29 \times 10^{23}$ kg.

**Données utiles** $a_S = 3{,}15\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ; $h = 200$ km ; $R_M = 2440$ km ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$

D'après la question 6, en norme : $a_S = \dfrac{G\,M}{(R_M+h)^2}$, donc $M = \dfrac{a_S\,(R_M+h)^2}{G}$.

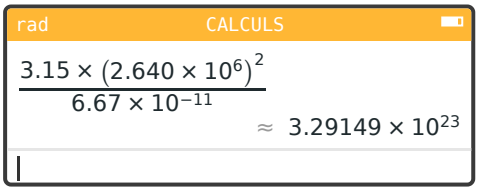
Avec $R_M + h = 2440 + 200 = 2640\ \text{km} = 2{,}640 \times 10^6$ m :

$$M = \frac{3{,}15 \times \left(2{,}640 \times 10^6\right)^2}{6{,}67 \times 10^{-11}} = 3{,}29 \times 10^{23}\ \text{kg}$$

$\boxed{M = 3{,}29 \times 10^{23}\ \text{kg}}$ : c'est la valeur attendue.

**PIÈGE**
Garder les distances en kilomètres : $G$ est en unités SI, il faut des mètres. Une erreur d'un facteur $10^3$ sur la distance donne un facteur $10^6$ sur $M$.

**À LA CALCULATRICE**



**8** En appliquant la troisième loi de Kepler à la sonde MESSENGER, calculer le demi-grand axe $a$ de son orbite. Expliquer pourquoi sa trajectoire ne peut pas être considérée comme circulaire.

**Données utiles** $k = \dfrac{4\pi^2}{G\,M}$ ; $T_S = 8{,}00$ h ; $M = 3{,}29 \times 10^{23}$ kg (Q7) ; $R_M + h = 2640$ km

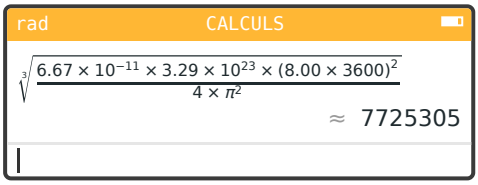
Pour la sonde en orbite autour de Mercure : $\dfrac{T_S^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M}$, donc $a = \sqrt[3]{\dfrac{G\,M\,T_S^2}{4\pi^2}}$, avec $T_S = 8{,}00 \times 3600 = 2{,}88 \times 10^4$ s.

$$a = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 3{,}29 \times 10^{23} \times (2{,}88 \times 10^4)^2}{4\pi^2}} = 7{,}73 \times 10^6 \text{ m}$$

Sur une orbite circulaire, la sonde resterait à une distance constante du centre de Mercure, égale à $a$. Or, au plus près, elle n'en est qu'à $R_M + h = 2640$ km, presque trois fois moins : cette distance varie, l'orbite est une ellipse allongée.

$a = 7{,}73 \times 10^6$ m $= 7{,}73 \times 10^3$ km, bien supérieur à 2640 km : la trajectoire n'est pas circulaire.

**À LA CALCULATRICE**




**PIÈGE**

Laisser $T_S$ en heures, ou utiliser la constante $k$ du Système solaire : elle ne vaut que pour les corps en orbite autour du Soleil. Ici l'astre attracteur est Mercure.

**COMPRENDRE**

Le grand axe mesure $2a$ : au plus loin, la sonde est à $2a - (R_M + h) \approx 1{,}28 \times 10^4$ km du centre de Mercure, près de cinq fois plus qu'au plus près.