# Un capteur capacitif

Bac 2022 Polynésie Jour 2 · Exercice 2 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

**1** Établir une relation entre les trois tensions électriques à l'aide de la loi des mailles, une fois l'interrupteur fermé.

Interrupteur fermé, la tension à ses bornes est nulle. En parcourant la maille, la flèche de $E$ est rencontrée dans un sens, celles de $u_R$ et $u_C$ dans l'autre : $E - u_R - u_C = 0$.

$$E = u_R + u_C$$

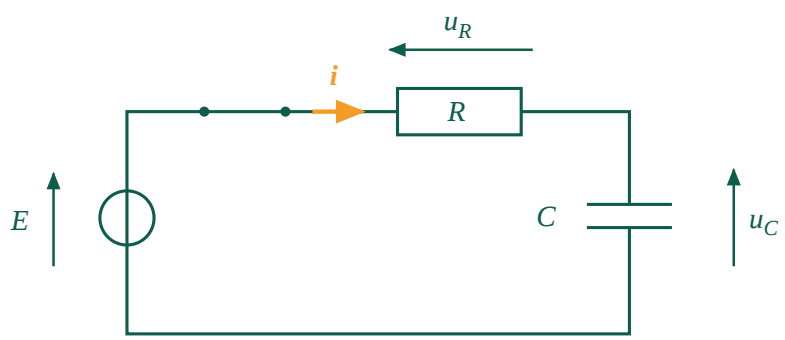
**MÉTHODE**
Choisir un sens de parcours de la maille : une tension dont la flèche va dans ce sens est comptée « $+$ », sinon « $-$ ». La somme est nulle.

**2** Écrire l'expression traduisant la loi d'Ohm pour le conducteur ohmique de résistance $R$.

Le courant $i$ sort de la borne positive du générateur : il traverse le conducteur ohmique dans le sens opposé à la flèche de $u_R$ (convention récepteur).

$$u_R = R\,i$$

**PIÈGE**
Sans orientation de $i$, la relation n'a pas de sens. Avec $i$ et $u_R$ fléchés dans le même sens, il faudrait écrire $u_R = -R\,i$.




**2** · Figure 1, interrupteur fermé : le courant $i$ (en orange) sort de la borne positive du générateur

**3** Écrire l'expression reliant le courant d'intensité $i$, la tension $u_C$ et la capacité $C$ du condensateur.

L'armature par laquelle arrive le courant porte la charge $q = C\,u_C$, et l'intensité est le débit de charge : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$. Comme $C$ est constante :

$$i = C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

**COMPRENDRE**
Cette relation vaut en convention récepteur, flèche de $u_C$ opposée au sens de $i$ : c'est le cas sur la figure 1.

**4** En déduire que l'équation différentielle vérifiée par $u_C$ s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{RC} = \dfrac{E}{RC}$.

**Données utiles** $E = u_R + u_C$ (Q1) ; $u_R = R\,i$ (Q2) ; $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ (Q3)

On remplace $i$ dans la loi d'Ohm : $u_R = RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

La loi des mailles devient : $RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E$.

On divise chaque terme par $RC$ :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

**MÉTHODE**
Toujours le même enchaînement pour un circuit RC : loi des mailles, loi d'Ohm, relation du condensateur, puis on isole la dérivée en divisant par $RC$.

**5** Vérifier que la solution est de la forme $u_C = E\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)$.

On dérive la fonction proposée : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = E \times \dfrac{1}{RC}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = \dfrac{E}{RC}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$.

On calcule le membre de gauche de l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} + \frac{E}{RC} - \frac{E}{RC}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E}{RC}$$

On retrouve le membre de droite. De plus $u_C(0) = E\,(1-1) = 0$ : le condensateur est bien déchargé à $t = 0$.

$u_C = E\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)$ vérifie l'équation différentielle et la condition initiale.

**PIÈGE**
La dérivée de $\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$ est $-\dfrac{1}{RC}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$ : les deux signes « $-$ » se compensent. Une erreur de signe ici empêche les exponentielles de s'éliminer.

**MÉTHODE**
« Vérifier » ne demande pas de résoudre : on dérive, on reporte dans le membre de gauche, on constate l'égalité. On contrôle aussi la valeur à $t = 0$.

**6** Déterminer graphiquement la valeur du temps caractéristique $\tau$.

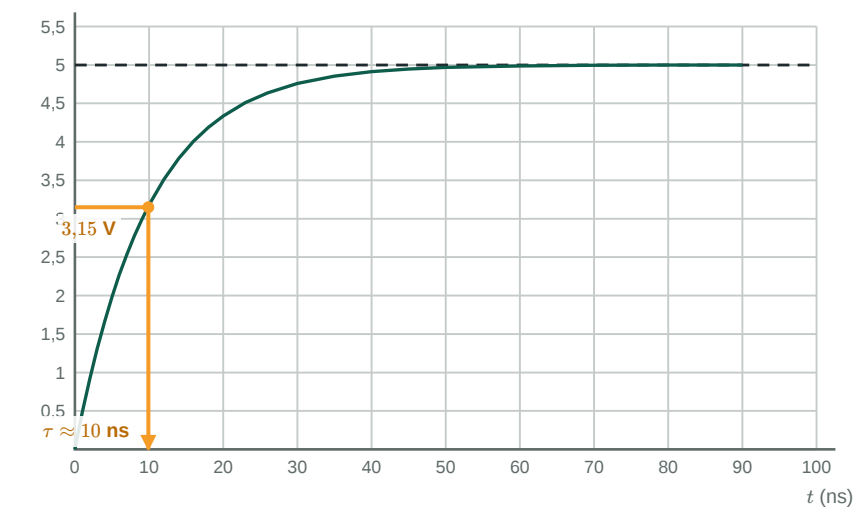
**Données utiles** figure 2 ; $\tau$ : durée nécessaire pour atteindre 63 % de la tension finale

Sur la figure 2, la tension finale (asymptote horizontale) vaut $5{,}0$ V.

$0{,}63 \times 5{,}0 = 3{,}15$ V, soit un peu plus de $3{,}1$ V.

La courbe atteint cette valeur à la date $t \approx 10$ ns.

$\tau \approx 10$ ns

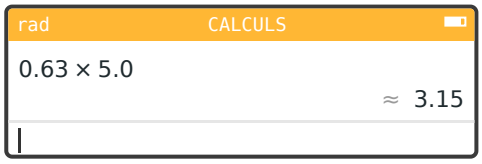



**6** · Figure 2 du sujet, avec la lecture de $\tau$ à 63 % de la tension finale

**PIÈGE**
Prendre 63 % de la hauteur de l'axe (5,5 V) au lieu de 63 % de la tension finale lue sur le palier (5,0 V).

**COMPRENDRE**
Une lecture graphique donne au mieux deux chiffres significatifs. Toute valeur de 9 à 10 ns, justifiée par un tracé soigné, est recevable.

**À LA CALCULATRICE**



**7** Écrire l'expression reliant le temps caractéristique $\tau$, la résistance $R$ et la capacité $C$.

$\tau = RC$

**COMPRENDRE**
Cohérence avec la question 5 : à $t = RC$, $u_C = E\,(1 - \mathrm{e}^{-1}) \approx 0{,}63\,E$. C'est bien la définition donnée par le sujet.

**8** En déduire la valeur de la capacité $C$ du condensateur.

**Données utiles** $R = 330\ \Omega$ ; $\tau \approx 10$ ns (Q6) ; $1\ \text{ns} = 10^{-9}$ s

$\tau = RC$ donc $C = \dfrac{\tau}{R}$

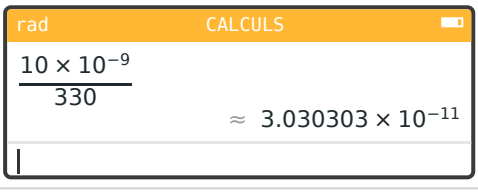
$$C = \frac{10 \times 10^{-9}}{330} = 3{,}0 \times 10^{-11}\ \text{F}$$

$C = 3{,}0 \times 10^{-11}$ F, soit 30 pF

**PIÈGE**
Laisser $\tau$ en nanosecondes : le résultat serait un milliard de fois trop grand. Il faut des secondes pour obtenir des farads.

**COMPRENDRE**
Deux chiffres significatifs, comme $\tau$. Une capacité de quelques dizaines de picofarads est faible mais courante pour un petit condensateur.

**À LA CALCULATRICE**




**9** Sachant que la capacité s'exprime en farad, déterminer l'unité légale de la permittivité $\varepsilon$.

**Données utiles** $C = \dfrac{\varepsilon \times S}{d}$

On isole la permittivité : $\varepsilon = \dfrac{C \times d}{S}$, où $C$ est en farad, $d$ en mètre et $S$ en mètre carré.

L'unité de $\varepsilon$ est donc $\dfrac{\text{F} \times \text{m}}{\text{m}^2} = \dfrac{\text{F}}{\text{m}}$.

$\varepsilon$ s'exprime en $\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ (farad par mètre).

**MÉTHODE**
Pour trouver une unité : isoler la grandeur, remplacer chaque grandeur par son unité, puis simplifier comme dans un calcul littéral.

**10** On rapproche l'armature mobile de l'armature fixe. Décrire l'évolution de la capacité $C$.

Rapprocher les armatures diminue la distance $d$. Dans $C = \dfrac{\varepsilon \times S}{d}$, $\varepsilon$ et $S$ sont constantes et $d$ est au dénominateur : $C$ est inversement proportionnelle à $d$.

Quand on rapproche les armatures, la capacité $C$ **augmente**.

**11** Expliquer comment utiliser le montage de la figure 4 pour contrôler l'épaisseur de colle.

Les plaques A et B séparées par la colle forment un condensateur plan dont l'épaisseur de colle est la distance $d$ entre les armatures.

- On ferme l'interrupteur et on enregistre $u_C(t)$ pendant la charge.
- On lit le temps caractéristique $\tau$ à 63 % de la tension finale, comme à la question 6.
- La résistance $R$ étant connue, on calcule $C = \dfrac{\tau}{R}$.
- Connaissant $\varepsilon$ et la surface $S$ des plaques, on en déduit l'épaisseur.

$d = \dfrac{\varepsilon \times S}{C} = \dfrac{\varepsilon \times S \times R}{\tau}$ : on compare cette valeur à l'épaisseur voulue.

**PIÈGE**
Se contenter de « on mesure $C$ » ne rapporte pas tous les points : il faut dire comment (charge, $\tau$, $R$) et relier $C$ à l'épaisseur.

**COMPRENDRE**
Trop de colle : $d$ plus grande, $C$ plus petite, charge plus rapide ($\tau$ plus court). Pas assez de colle : $\tau$ plus long. La seule mesure de $\tau$ suffit donc au contrôle.