Saut en parachute

Bac S 2020 Nouvelle-Calédonie (ancien programme) · Exercice 2 **11 points** **Durée conseillée 2 h**

1.1 Recopier et compléter le tableau en affectant chaque équation horaire z_a, z_b, z_c, z_d à une phase du saut, en justifiant brièvement.

Données utiles $z_a(t) = -50\,t + 4{,}0 \times 10^3$; $z_b(t) = -4{,}2\,t + 1{,}75 \times 10^3$; $z_c(t) = 6{,}1\,t + 4{,}6 \times 10^3$; $z_d(t) = 4{,}0 \times 10^3$ (t en s, z en m)

Le coefficient directeur de chaque droite est la vitesse verticale $v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

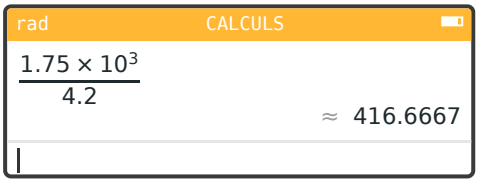
- Phase 1 (ascension) : l'altitude augmente, le coefficient directeur est positif : $z_c(t)$.
- Phase 2 (avion à l'horizontale) : l'altitude est constante : $z_d(t)$.
- Phase 3 (parachute fermé) : l'altitude diminue très vite, le coefficient directeur est négatif et le plus grand en valeur absolue : $z_a(t)$.
- Phase 4 (parachute ouvert) : l'altitude diminue lentement, le coefficient directeur est négatif et faible en valeur absolue : $z_b(t)$.

Phase 1 : z_c ; phase 2 : z_d ; phase 3 : z_a ; phase 4 : z_b.

COMPRENDRE
Vérification par les ordonnées : $z_a(0) = 4{,}0 \times 10^3$ m, altitude du saut à $t = 0$; z_b s'annule pour $t \approx 417$ s, date de l'atterrissage sur la figure 1.

MÉTHODE
Pour associer une droite à une phase, regarder d'abord le signe du coefficient directeur (montée, palier, descente), puis sa valeur absolue (descente rapide ou lente).

À LA CALCULATRICE



1.2 Montrer que la vitesse verticale maximale citée dans l'introduction est compatible avec les données de la montre connectée.

Données utiles vitesse annoncée : environ $200\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$; phase 3 : $z_a(t) = -50\,t + 4{,}0 \times 10^3$ (1.1)

La vitesse verticale est la plus grande pendant la phase 3 (parachute fermé). Elle est donnée par la dérivée de z_a :

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z_a}{\mathrm{d}t} = -50\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

La valeur de la vitesse verticale est donc $50\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, soit $50 \times 3{,}6 = 180\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

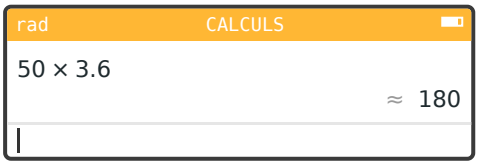
L'écart relatif avec la valeur annoncée est $\dfrac{200 - 180}{200} = 10\ \%$: c'est le même ordre de grandeur, et le texte dit « environ ».

$|v_z| = 50\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 1{,}8 \times 10^2\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, compatible avec « environ $200\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ ».

PIÈGE
Diviser par 3,6 au lieu de multiplier. De $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ vers $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, on multiplie par 3,6 ; le signe « $-$ » indique seulement que le tandem descend.

COMPRENDRE
Le coefficient -50 est une vitesse moyenne sur toute la phase 3, qui inclut la mise en vitesse du début : la vitesse maximale réelle est un peu plus grande, ce qui rapproche encore de $200\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

À LA CALCULATRICE



2.1 Peut-on considérer la valeur du champ de pesanteur comme constante et égale à g_0 tout au long du saut ? Justifier.

Données utiles $g(z) = g_0\left(1 - \dfrac{2z}{R_T}\right)$; $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m ; altitude maximale $z = 4{,}0 \times 10^3$ m ; critère : écart inférieur à 1 %

L'écart relatif entre $g(z)$ et g_0 vaut :

$$\frac{g_0 - g(z)}{g_0} = \frac{2z}{R_T}$$

Il est le plus grand à l'altitude maximale du saut, $z = 4{,}0 \times 10^3$ m :

$$\frac{2 \times 4{,}0 \times 10^3}{6{,}37 \times 10^6} = 1{,}3 \times 10^{-3} = 0{,}13\ \%$$

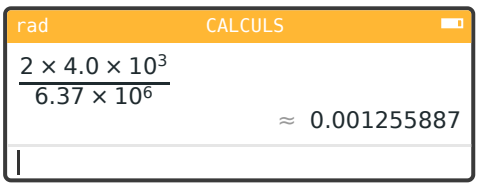
Cet écart est inférieur à 1 % ; il est encore plus petit aux altitudes inférieures.

Écart maximal $0{,}13\ \% < 1\ \%$: on peut prendre $g = g_0$ pendant tout le saut.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme l'altitude $4{,}0 \times 10^3$ m, donnée la moins précise. Dans tout l'exercice, le résultat garde le nombre de chiffres de la donnée la moins précise.

MÉTHODE
Pour tester un critère « sur tout un intervalle », se placer dans le cas le plus défavorable : ici l'altitude la plus haute. Si le critère y est vérifié, il l'est partout.

À LA CALCULATRICE



2.2 Montrer que les coordonnées du vecteur accélération du système sont $a_x(t) = 0$ et $a_z(t) = -g_0$.

Système {tandem}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Modèle de la chute libre : la seule force exercée est le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}_0$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g}_0 = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}_0$.

Le champ de pesanteur est vertical, vers le bas, de valeur g_0 : $\vec{g}_0 = -g_0\,\vec{k}$.

$a_x(t) = 0$ et $a_z(t) = -g_0$

PIÈGE
Oublier le système, le référentiel galiléen ou le bilan des forces : chacun rapporte des points. Le signe « $-$ » vient de l'axe (Oz) orienté vers le haut.

2.3 Établir que les équations horaires du mouvement s'écrivent $x(t) = v_0\,t$ et $z(t) = -g_0\,\dfrac{t^2}{2} + h_0$.

Données utiles à $t = 0$: position $(0\,;\ h_0)$, vitesse $\vec{v}_0$ horizontale de valeur v_0

$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$: on cherche les primitives de $a_x = 0$ et $a_z = -g_0$.

$v_x(t) = C_1$ et $v_z(t) = -g_0\,t + C_2$

À $t = 0$, $\vec{v}_0$ est horizontal : $v_x(0) = v_0$ et $v_z(0) = 0$, donc $C_1 = v_0$ et $C_2 = 0$.

$v_x(t) = v_0$ et $v_z(t) = -g_0\,t$

$\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$: on cherche de nouveau les primitives.

$x(t) = v_0\,t + C_3$ et $z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g_0\,t^2 + C_4$

À $t = 0$, le tandem est à la verticale de O, à l'altitude h_0 : $x(0) = 0$ et $z(0) = h_0$, donc $C_3 = 0$ et $C_4 = h_0$.

$$\boxed{x(t) = v_0\,t \text{ et } z(t) = -g_0\,\frac{t^2}{2} + h_0}$$

PIÈGE
Écrire directement le résultat donné par l'énoncé : « établir » exige les deux étapes et la justification de chaque constante.

MÉTHODE
Deux intégrations successives, et après chacune les constantes fixées par les conditions initiales : vitesse initiale pour la première, position initiale pour la seconde.

2.4 En déduire que l'équation de la trajectoire s'écrit $z(x) = -g_0\,\dfrac{x^2}{2\,v_0^2} + h_0$.

On élimine le temps : $x = v_0\,t$ donne $t = \dfrac{x}{v_0}$.

On remplace dans $z(t)$:

$$z = -\frac{g_0}{2}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + h_0$$

$$\boxed{z(x) = -g_0\,\frac{x^2}{2\,v_0^2} + h_0}$$

COMPRENDRE
La trajectoire est un arc de parabole de sommet $(0\,;\ h_0)$: c'est bien l'allure de la courbe de la figure 2.

2.5 Le tandem ouvre son parachute à l'altitude $z = 1\,500$ m. Montrer que, dans le cadre de ce modèle, cette ouverture s'effectue au-dessus de la piste.

Données utiles $v_0 = 33\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $h_0 = 4\,000$ m ; $g_0 = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$; la piste débute en O et mesure 1 km

On cherche l'abscisse x du point d'altitude $z = 1\,500$ m. D'après l'équation de la trajectoire :

$$g_0\,\frac{x^2}{2\,v_0^2} = h_0 - z \quad \text{donc} \quad x = v_0\sqrt{\frac{2\,(h_0 - z)}{g_0}}$$

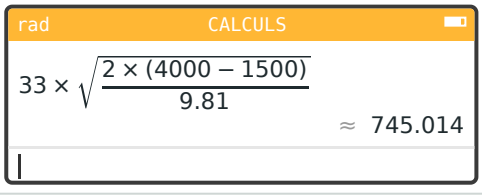
$$x = 33 \times \sqrt{\frac{2 \times (4\,000 - 1\,500)}{9{,}81}} = 7{,}5 \times 10^2\ \mathrm{m}$$

La piste s'étend de $x = 0$ à $x = 1\,000$ m, et $0 < 7{,}5 \times 10^2\ \mathrm{m} < 1\,000$ m.

$x = 7{,}5 \times 10^2$ m, inférieur à 1 km : l'ouverture a lieu au-dessus de la piste.

PIÈGE
Remplacer z par 0 (arrivée au sol) ou oublier la racine carrée. On ne garde que la solution positive : le tandem part dans le sens de $\vec{v}_0$.

À LA CALCULATRICE



2.6 Calculer, dans le cadre de ce modèle, la durée de la phase 3 et la comparer à celle déduite de la figure 1. Conclure sur la pertinence du modèle de la chute libre.

Données utiles $h_0 = 4\,000$ m ; ouverture à $z = 1\,500$ m ; $g_0 = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

La phase 3 se termine à la date t_3 telle que $z(t_3) = 1\,500$ m :

$$-g_0\,\frac{t_3^2}{2} + h_0 = z \quad \text{donc} \quad t_3 = \sqrt{\frac{2\,(h_0 - z)}{g_0}}$$

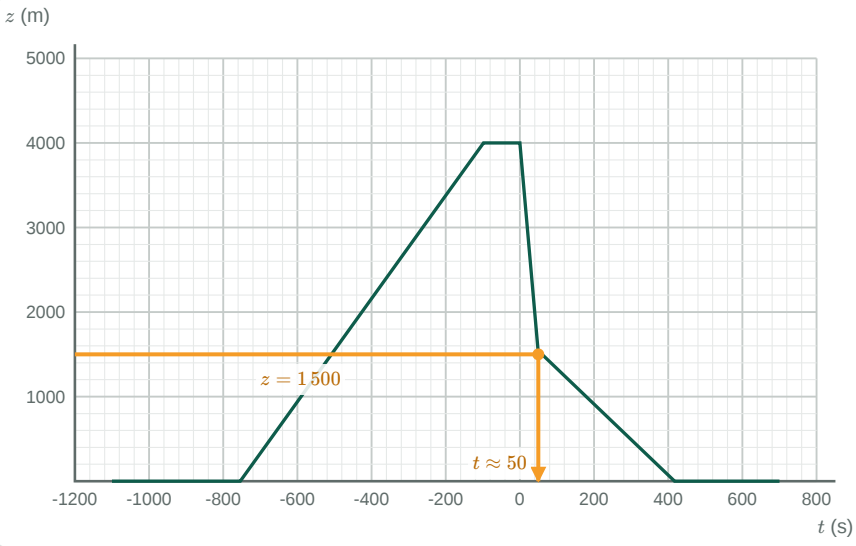
$$t_3 = \sqrt{\frac{2 \times (4\,000 - 1\,500)}{9{,}81}} = 23\ \text{s}$$

Sur la figure 1, la phase 3 commence à $t = 0$ et se termine à la rupture de pente, à l'altitude $1\,500$ m, soit à $t \approx 50$ s (valeur aussi citée dans le texte d'introduction).

La durée réelle est environ deux fois plus grande que celle du modèle. De plus, en chute libre, la vitesse verticale atteindrait $g_0\,t_3 = 9{,}81 \times 22{,}6 = 2{,}2 \times 10^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, soit environ $800\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, très au-dessus des $200\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ mesurés.

L'action de l'air sur le tandem n'est donc pas négligeable devant le poids.

Modèle : $t_3 = 23$ s ; figure 1 : environ 50 s. Le modèle de la chute libre n'est pas pertinent pour la phase 3.



2.6 · Figure 1 schématisée par les quatre modèles affines, avec la lecture de la fin de la phase 3

COMPRENDRE

Autre indice : sur la figure 1, la phase 3 est presque une droite (vitesse constante), alors qu'une chute libre donnerait un arc de parabole pour $z(t)$.

MÉTHODE

Vérification rapide : $t_3 = \dfrac{x}{v_0} = \dfrac{745}{33}$ redonne 23 s avec le résultat de la question 2.5.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\sqrt{\dfrac{2 \times (4000 - 1500)}{9.81}} \approx 22.57618$

$9.81 \times 22.6 \approx 221.706$

$221.706 \times 3.6 \approx 798.1416$

3.1 Associer chacun des schémas a et b à un instant de la chute (juste après l'ouverture ; quelques secondes après l'ouverture). Justifier à partir des données expérimentales de la partie 1.

D'après la partie 1, la valeur de la vitesse verticale passe de $50\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (phase 3) à $4{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (phase 4), puis reste constante.

Juste après l'ouverture, le tandem descend en ralentissant : le vecteur accélération est vertical vers le haut. D'après la deuxième loi de Newton, $\vec{P}+\vec{F}_f = m\,\vec{a}$ est aussi vers le haut, donc $F_f > P$: c'est le schéma b.

Quelques secondes après, le mouvement est rectiligne uniforme. D'après le principe d'inertie, $\vec{P}+\vec{F}_f = \vec{0}$, donc $F_f = P$: c'est le schéma a, celui où $\vec{F}_f$ est la moins longue.

Schéma b : juste après l'ouverture ($F_f > P$) ; schéma a : quelques secondes après ($F_f = P$).

PIÈGE
Croire que $F_f > P$ fait remonter le tandem. Il continue de descendre, mais de moins en moins vite : la somme des forces donne le sens de l'accélération, pas celui de la vitesse.

COMPRENDRE
Les schémas sont « sans souci d'échelle » : seule compte la comparaison entre les deux, la force $\vec{F}_f$ étant nettement plus longue sur le schéma b.

3.2 Estimer la valeur de la vitesse verticale du tandem à partir des données expérimentales de la partie 1.

Données utiles phase 4 : $z_b(t) = -4{,}2\,t + 1{,}75\times10^3$ (1.1)

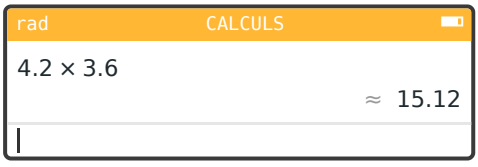
La phase 4 est modélisée par $z_b(t)$. La coordonnée verticale de la vitesse est sa dérivée :

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z_b}{\mathrm{d}t} = -4{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$v_z = -4{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: le tandem descend à $4{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (environ $15\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$).

COMPRENDRE
Contrôle sur la figure 1 : de $1\,500$ m à $t \approx 50$ s jusqu'au sol à $t \approx 420$ s, soit $1\,500 \div 370 \approx 4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. L'ordre de grandeur est le même.

À LA CALCULATRICE



3.3 Déterminer la valeur F_f de la norme de la force qui modélise l'action de l'air sur le système {tandem}.

Données utiles $m = 200$ kg ; $g_0 = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

Système {tandem} dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Forces : le poids $\vec{P}$ et l'action de l'air $\vec{F}_f$.

Le mouvement est rectiligne uniforme. D'après le principe d'inertie (première loi de Newton) : $\vec{P}+\vec{F}_f = \vec{0}$.

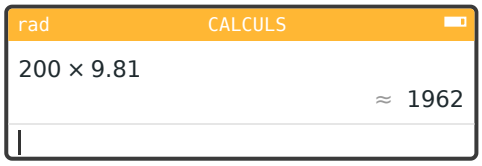
Les deux forces ont donc la même norme :

$$F_f = P = m\,g_0 = 200\times9{,}81 = 1{,}96\times10^3\ \text{N}$$

$F_f = 1{,}96\times10^3$ N

COMPRENDRE
Vitesse constante ne veut pas dire absence de force : les forces se compensent. C'est la deuxième loi de Newton avec $\vec{a} = \vec{0}$.

À LA CALCULATRICE



3.4 Avec $F_f = k\,v_z^2$, montrer que la constante k vaut $1{,}1 \times 10^2$ S.I. et préciser son unité.

Données utiles $F_f = 1{,}96 \times 10^3$ N (3.3) ; $v_z = -4{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (3.2)

$$k = \frac{F_f}{v_z^2} = \frac{1{,}96 \times 10^3}{4{,}2^2} = 1{,}1 \times 10^2 \text{ S.I.}$$

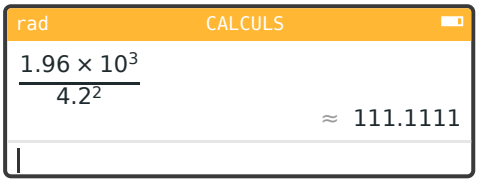
Unité : k est une force divisée par le carré d'une vitesse, donc en $\text{N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2$.

Comme $1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$: $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2 = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$.

$k = 1{,}1 \times 10^2\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$ (ou $\text{N} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-2}$), valeur attendue : $1{,}1 \times 10^2$ S.I.

MÉTHODE
Pour l'unité d'une constante, isoler la constante dans la relation puis remplacer chaque grandeur par son unité. Le newton se décompose avec $P = m\,g$: $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

À LA CALCULATRICE



3.5 Calculer la valeur de l'énergie cinétique du tandem avant l'arrivée au sol.

Données utiles $m = 200$ kg ; $v_z = -4{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (3.2)

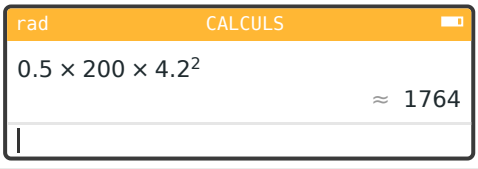
La trajectoire est verticale : la valeur de la vitesse est $v = |v_z| = 4{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

$$E_c = \frac{1}{2} m\,v^2 = \frac{1}{2} \times 200 \times 4{,}2^2 = 1{,}8 \times 10^3\ \text{J}$$

$E_c = 1{,}8 \times 10^3$ J

PIÈGE
Oublier le carré ou le facteur $\frac{1}{2}$. La masse est en kg et la vitesse en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ pour obtenir des joules.

À LA CALCULATRICE



3.6 Avec le parachute de secours ($k_S = \dfrac{k}{2}$), déterminer la vitesse verticale v_{zS} et l'énergie cinétique du tandem avant l'arrivée au sol. Commenter.

Données utiles $v_z = -4{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (3.2) ; $E_c = 1{,}8\times10^3$ J (3.5) ; $m = 200$ kg ; $g_0 = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

À vitesse constante, l'action de l'air compense encore le poids : $k_S\, v_{zS}^2 = m\, g_0$. Avec le parachute principal : $k\, v_z^2 = m\, g_0$.

Donc $\dfrac{k}{2}\, v_{zS}^2 = k\, v_z^2$, soit $v_{zS}^2 = 2\, v_z^2$:

$|v_{zS}| = \sqrt{2} \times |v_z| = \sqrt{2} \times 4{,}2 = 5{,}9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Énergie cinétique : $E_{cS} = \dfrac{1}{2}\, m\, v_{zS}^2 = \dfrac{1}{2}\, m \times 2\, v_z^2 = 2\, E_c$

$E_{cS} = 200 \times 4{,}2^2 = 3{,}5\times10^3$ J

Commentaire : avec le parachute de secours, la vitesse à l'arrivée est multipliée par $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ et l'énergie cinétique à dissiper au contact du sol est doublée. L'atterrissage est plus brutal, mais la vitesse reste modérée (environ $21\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$) : le parachute de secours remplit son rôle.

$v_{zS} = -5{,}9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (valeur $5{,}9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) et $E_{cS} = 3{,}5\times10^3$ J, le double de E_c.

PIÈGE

Diviser la vitesse par 2 ou la multiplier par 2. La force dépend de v_z^2 : diviser k par 2 multiplie v_z^2 par 2, donc la vitesse par $\sqrt{2}$ seulement.

COMPRENDRE

Pour se représenter ces chocs : $5{,}9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ est la vitesse atteinte après une chute libre de $h = \dfrac{v^2}{2\, g_0} \approx 1{,}8$ m, contre $0{,}90$ m avec le parachute principal.

À LA CALCULATRICE

