La mission GRACE-FO

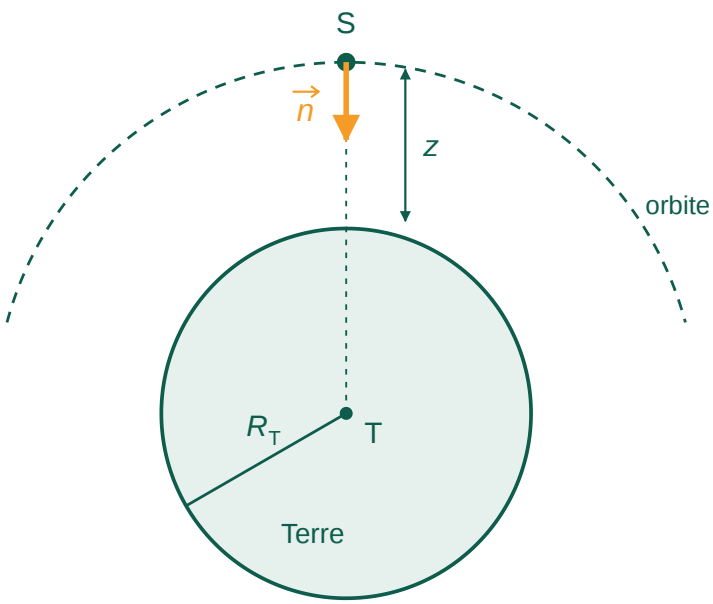
Bac 2021 Amérique du Nord Sujet 2 · Exercice 1 **10 points** **Durée conseillée 1 h 15**

A.1 Faire un schéma montrant la Terre (centre T, rayon R_T), le satellite S sur son orbite à l'altitude z et un vecteur unitaire $\vec{n}$ dirigé du satellite vers la Terre.

Le schéma montre la Terre de centre T, un rayon R_T, l'orbite circulaire de centre T et le satellite S à la distance $TS = R_T + z$ du centre.

Le vecteur unitaire $\vec{n}$ part de S et pointe vers T, le long de la droite (ST).

PIÈGE
L'altitude z se mesure depuis la surface de la Terre, pas depuis son centre : le rayon de l'orbite est $R_T + z$.



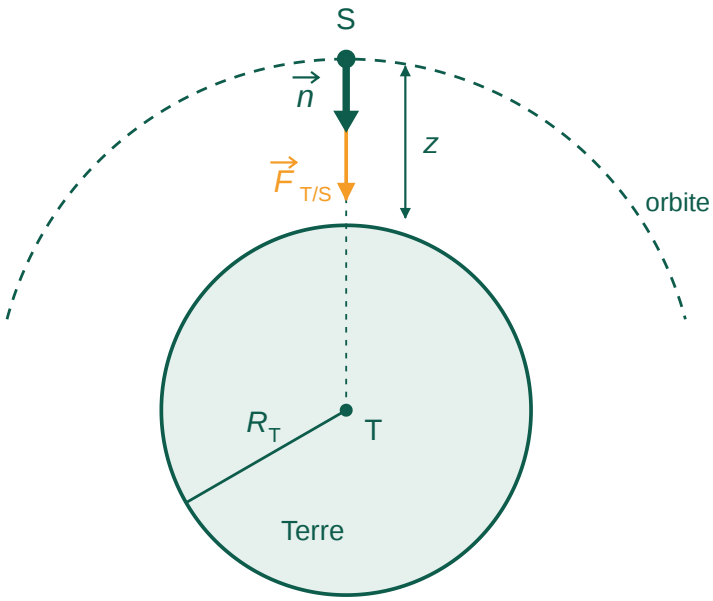
A.1 · Schéma de la situation (sans souci d'échelle)

A.2 Donner l'expression vectorielle de la force gravitationnelle $\vec{F}_{T/S}$ exercée par la Terre sur le satellite, puis la représenter sur le schéma.

La force est attractive, dirigée de S vers T, donc de même sens que $\vec{n}$; la distance entre les centres est $R_T + z$.

$$\vec{F}_{T/S} = G\,\frac{m\,M_T}{(R_T+z)^2}\,\vec{n}$$

PIÈGE
Écrire z^2 ou R_T^2 au dénominateur, ou placer un signe « $-$ » devant $\vec{n}$ alors que ce vecteur pointe déjà vers la Terre.



A.2 · Schéma complété : la force a la direction et le sens du vecteur unitaire

A.3 En déduire l'expression vectorielle du champ gravitationnel terrestre $\vec{g}$.

Le champ gravitationnel au point S est défini par $\vec{F}_{T/S} = m\,\vec{g}$, donc $\vec{g} = \dfrac{\vec{F}_{T/S}}{m}$.

$$\vec{g} = G\,\frac{M_T}{(R_T+z)^2}\,\vec{n}$$

COMPRENDRE
Le champ ne dépend pas de la masse m du satellite, seulement de la Terre et de l'altitude.

A.4 En considérant uniquement l'action de la Terre, établir l'expression vectorielle de l'accélération $\vec{a}$ du satellite.

Système : {satellite}, de masse m constante. Référentiel : géocentrique, considéré galiléen. Seule force : $\vec{F}_{T/S}$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $G\,\dfrac{m\,M_T}{(R_T+z)^2}\,\vec{n} = m\,\vec{a}$.

$$\vec{a} = G\,\frac{M_T}{(R_T+z)^2}\,\vec{n} = \vec{g}$$

MÉTHODE
Toujours annoncer le système, le référentiel et le bilan des forces avant d'écrire la deuxième loi de Newton : ces trois éléments sont notés.

A.5 Montrer que, dans l'approximation d'une orbite circulaire, le mouvement du satellite est uniforme.

Dans le repère de Frenet $(S\,;\vec{t},\vec{n})$, où $\vec{t}$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire dans le sens du mouvement, l'accélération d'un mouvement circulaire de rayon R_T+z s'écrit :

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R_T+z}\,\vec{n} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{t}$$

D'après A.4, $\vec{a}$ n'a aucune composante selon $\vec{t}$. Par identification :

$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$: la valeur v de la vitesse est constante, le mouvement circulaire est **uniforme**.

PIÈGE
Dire « l'accélération est constante donc le mouvement est uniforme ». Le vecteur $\vec{a}$ change de direction à chaque instant ; c'est sa composante tangentielle nulle qui prouve l'uniformité.

A.6 Montrer que la vitesse du satellite s'exprime par $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{R_T + z}}$.

On identifie cette fois les composantes selon $\vec{n}$ des deux expressions de $\vec{a}$ (A.4 et A.5) :

$$\frac{v^2}{R_T + z} = \frac{G\,M_T}{(R_T + z)^2} \quad \text{donc} \quad v^2 = \frac{G\,M_T}{R_T + z}$$

$v = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{R_T + z}}$, ce qui est bien la relation attendue.

MÉTHODE
Force centrale et orbite circulaire : la composante tangentielle de $\vec{a}$ donne l'uniformité, la composante normale donne la vitesse. Les deux questions se traitent avec la même égalité.

A.7 En déduire la valeur de la période de révolution du satellite et vérifier qu'elle est conforme à l'information « environ 15 fois leur orbite par jour ».

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg ; $R_T = 6371$ km ; $z = 490$ km

Le mouvement est uniforme : pendant une période T, le satellite parcourt la circonférence $2\pi(R_T + z)$ à la vitesse v.

$$T = \frac{2\pi(R_T + z)}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + z)^3}{G\,M_T}}$$

Avec $R_T + z = 6371 + 490 = 6861\ \text{km} = 6{,}861 \times 10^6$ m :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(6{,}861 \times 10^6)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}} = 5{,}65 \times 10^3\ \text{s}$$

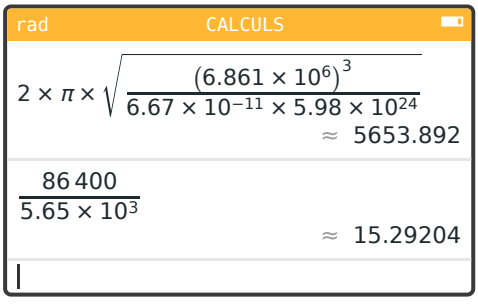
soit environ 1 h 34 min. Un jour dure $24 \times 3600 = 86\,400$ s ; le nombre de tours par jour est $\dfrac{86\,400}{5{,}65 \times 10^3} = 15{,}3$.

$T = 5{,}65 \times 10^3$ s : le satellite effectue environ 15 révolutions par jour, en accord avec l'énoncé.

PIÈGE
Laisser $R_T + z$ en kilomètres : G est en unités SI, la distance doit être en mètres. Additionner aussi R_T et z avant d'élever au cube.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme G, M_T et z, les données les moins précises. La vitesse correspondante vaut $v = 7{,}62 \times 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

À LA CALCULATRICE



A.8 Dans la situation schématisée ($\vec{g}_1$ non centripète pour le satellite de tête, $\vec{g}_2$ centripète pour le deuxième), expliquer si la distance L entre les deux satellites reste constante, augmente ou diminue.

D'après A.4, l'accélération de chaque satellite est égale au champ gravitationnel à l'endroit où il se trouve : $\vec{a}_1 = \vec{g}_1$ et $\vec{a}_2 = \vec{g}_2$.

Deuxième satellite : $\vec{g}_2$ est centripète, sans composante tangentielle, donc $\dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = 0$. Sa vitesse reste constante.

Satellite de tête : il précède l'autre, donc il se déplace vers la gauche du schéma. Le vecteur $\vec{g}_1$ ne pointe pas vers le centre de la Terre : il est incliné vers l'avant. L'accélération $\vec{a}_1$ possède une composante tangentielle dans le sens du mouvement, donc $\dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} > 0$. Sa vitesse augmente.

Le satellite de tête va de plus en plus vite alors que le suivant garde la même vitesse.

L'écart L qui sépare les deux satellites **augmente**.

PIÈGE
Répondre sans préciser le sens du mouvement. Une composante tangentielle dirigée vers l'arrière aurait freiné le satellite de tête et la conclusion serait inversée.

COMPRENDRE
C'est le principe de la mission : un excès de masse en avant attire d'abord le satellite de tête, qui s'éloigne de son jumeau. Mesurer la variation de L renseigne sur le champ gravitationnel local.

B.1 Justifier que le dispositif schématisé permet d'obtenir des interférences.

Les faisceaux 1 et 2 proviennent du même laser : le miroir semi-réfléchissant A partage une seule onde en deux. Ces deux ondes ont donc la même fréquence et un déphasage constant l'une par rapport à l'autre : elles sont cohérentes.

Après avoir suivi deux trajets différents (ABCD et AD), elles se superposent en D.

Deux ondes cohérentes se superposent au niveau du détecteur : il y a interférences.

COMPRENDRE
Deux lasers distincts ne donneraient pas d'interférences stables, car leur déphasage varie au hasard. Diviser un seul faisceau garantit la cohérence.

B.2 Définir le phénomène d'interférence constructive de deux ondes.

L'interférence est constructive lorsque les deux ondes arrivent en phase au point considéré : leurs maxima coïncident.

L'onde résultante a alors une amplitude maximale ; cela se produit si la différence de marche vaut $\delta = k\,\lambda$, avec k entier.

PIÈGE
Confondre avec l'interférence destructive, obtenue pour des ondes en opposition de phase, soit $\delta = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\lambda$: l'amplitude est alors minimale.

B.3 À l'aide du schéma, établir l'expression de la différence de marche δ en fonction de L.

Données utiles schéma : $AB = CD = L$; $BC = AD = h$

La différence de marche est la différence entre les longueurs des deux trajets suivis de A à D :

$\delta = (AB + BC + CD) - AD = (L + h + L) - h$

$\delta = 2L$

COMPRENDRE
Le trajet BC du faisceau 1 a la même longueur h que le trajet AD du faisceau 2 : ils se compensent. Il ne reste que l'aller et le retour entre les deux satellites.

B.4 Le satellite 1 s'éloigne d'une distance d du satellite 2. Montrer que la variation $\Delta\delta$ de la différence de marche vaut $2d$.

La distance entre les satellites devient $L + d$. Le même raisonnement qu'en B.3 donne la nouvelle différence de marche : $\delta' = 2(L + d)$.

$\Delta\delta = \delta' - \delta = 2(L + d) - 2L$

$\Delta\delta = 2d$, ce qui est bien la valeur attendue.

B.5 Justifier que la variation de distance d correspondant à deux états immédiatement successifs d'interférence constructive est égale à $\frac{\lambda}{2}$.

Interférence constructive : $\delta = k\,\lambda$ avec k entier. L'état constructif suivant correspond à $\delta' = (k + 1)\,\lambda$.

Entre ces deux états : $\Delta\delta = (k + 1)\,\lambda - k\,\lambda = \lambda$.

Or $\Delta\delta = 2d$ (B.4), donc $2d = \lambda$.

$d = \frac{\lambda}{2}$, ce qui est bien la relation attendue.

COMPRENDRE
Le faisceau 1 fait un aller-retour : un éloignement de d allonge son trajet de $2d$. Une demi-longueur d'onde de déplacement suffit donc à décaler la différence de marche d'une longueur d'onde entière.

B.6 Calculer la plus petite valeur de la variation de distance entre les deux satellites détectable par l'interféromètre.

Données utiles $\lambda = 1064$ nm ; $d = \frac{\lambda}{2}$ (B.5)

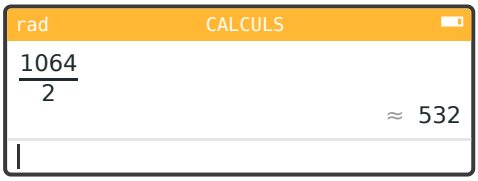
Le détecteur repère au mieux le passage d'un état constructif au suivant, donc la plus petite variation détectable est :

$d = \frac{\lambda}{2} = \frac{1064}{2} = 532{,}0$ nm

$d = 532{,}0\ \text{nm} = 5{,}320 \times 10^{-7}$ m

COMPRENDRE
Quatre chiffres significatifs, comme λ ; le 2 est un nombre exact. On détecte environ un demi-micromètre sur 220 km, soit une variation relative de l'ordre de 10^{-12}.

À LA CALCULATRICE



C.1 Discuter de l'influence du déplacement X, choisi positif, sur la valeur de la capacité C du condensateur.

Données utiles $C = \frac{\varepsilon_0\,S}{D}$

Lorsque l'armature mobile se déplace de $X > 0$, la distance entre les armatures passe de e à $D = e + X$: elle augmente.

$C = \frac{\varepsilon_0\,S}{e + X}$, avec ε_0 et S constants : C est inversement proportionnelle à D.

Quand X augmente, la capacité C **diminue** ; elle est inférieure à sa valeur au repos $\frac{\varepsilon_0\,S}{e}$.

COMPRENDRE
C'est ce qui fait du condensateur un capteur : mesurer C revient à mesurer le déplacement X de la masse d'épreuve, donc la force non gravitationnelle qui l'a provoqué.

C.2 Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}$ créé entre les plaques du condensateur en fonction de U, e, X et du vecteur unitaire $\vec{i}$.

Entre les armatures d'un condensateur plan, le champ est uniforme, de valeur $E = \dfrac{U}{D}$ avec $D = e + X$.

Il est dirigé de l'armature positive (armature fixe, à gauche) vers l'armature négative (armature mobile, à droite) : il a le sens de $\vec{i}$.

$$\vec{E} = \frac{U}{e+X}\vec{i}$$

PIÈGE
Oublier le déplacement et écrire $\dfrac{U}{e}$, ou ne pas justifier le sens. Le champ électrique va toujours de l'armature chargée $+$ vers l'armature chargée $-$.

C.3 Identifier, parmi les quatre schémas, celui qui représente correctement le champ électrique $\vec{E}$ et la force électrique $\vec{F}$, en argumentant.

Données utiles armature fixe : charge $q > 0$; armature mobile : charge $-q$; $\vec{E}_1 = \dfrac{\vec{E}}{2}$

Champ : d'après C.2, $\vec{E}$ a le sens de $\vec{i}$, il est dirigé vers la droite. Les schémas 1 et 3 sont éliminés.

Force : l'armature mobile porte la charge $-q$ et se trouve dans le champ $\vec{E}_1$ créé par l'armature fixe, donc

$$\vec{F} = -q\,\vec{E}_1 = -\frac{q}{2}\vec{E}$$

Comme $q > 0$, $\vec{F}$ est de sens opposé à $\vec{E}$: elle est dirigée vers la gauche. Le schéma 4 est éliminé.

Le **schéma 2** convient : $\vec{E}$ vers la droite, $\vec{F}$ vers la gauche.

PIÈGE
L'énoncé écrit $\vec{E}_1 = \dfrac{\vec{E}_2}{2}$ alors qu'aucun champ $\vec{E}_2$ n'est défini : il faut lire $\dfrac{\vec{E}}{2}$, la moitié du champ régnant entre les armatures.

COMPRENDRE
Le résultat se vérifie sans calcul : deux armatures de charges opposées s'attirent, donc l'armature mobile est tirée vers l'armature fixe, à gauche.

C.4 Établir la relation existant entre le champ électrique $\vec{E}_d$ créé par l'armature fixe de droite et le champ électrique $\vec{E}_g$ créé par l'armature fixe de gauche.

Données utiles face gauche de la masse d'épreuve : charge $-q$; face droite : charge $+q$

Force exercée par l'armature fixe de gauche sur la face gauche de la masse d'épreuve, de charge $-q$: $\vec{F}_g = -q\,\vec{E}_g$.

Force exercée par l'armature fixe de droite sur la face droite, de charge $+q$: $\vec{F}_d = q\,\vec{E}_d$.

Les deux forces se compensent : $\vec{F}_g + \vec{F}_d = \vec{0}$, soit $-q\,\vec{E}_g + q\,\vec{E}_d = \vec{0}$, donc $q\,(\vec{E}_d - \vec{E}_g) = \vec{0}$ avec $q \neq 0$.

$\vec{E}_d = \vec{E}_g$: les champs créés par les deux armatures fixes sont identiques (direction, sens, valeur).

PIÈGE
Conclure $\vec{E}_d = -\vec{E}_g$ parce que les forces sont opposées. Les deux faces de la masse d'épreuve portent des charges de signes contraires : des forces opposées correspondent ici à des champs égaux.