EXERCICE 1 LA MISSION GRACE-FO (10 points)

L'attraction gravitationnelle de notre planète varie faiblement d'un mois à l'autre. Ces faibles variations de la gravité sont principalement dues à une infime fraction de la masse terrestre, constamment en mouvement, essentiellement de l'eau : la pluie tombe, la rosée s'évapore, les courants océaniques coulent, la glace fond...

Le 22 mai 2018, deux satellites scientifiques GRACE-FO (Gravity Recovery and Climate Experiment - Follow-on) sont lancés. Ces deux satellites jumeaux situés sur la même orbite ont pour objectif de mesurer avec une grande précision les variations mensuelles du champ de gravité de la Terre afin de suivre les masses d'eau liquide ou gelée.



A. Caractéristiques de l'orbite

L'orbite des satellites de la mission GRACE-FO est quasi circulaire à l'altitude z égale à 490 km. L'inclinaison du plan de la trajectoire sur l'équateur est égale à 89,0 degrés ; on parle d'une orbite polaire. Les deux satellites jumeaux se déplacent sur la même orbite à une distance, notée L, de 220 km l'un de l'autre. Leur altitude leur permet de parcourir environ 15 fois leur orbite polaire par jour et d'obtenir ainsi une cartographie mensuelle de l'évolution des masses d'eau.

On étudie le mouvement d'un de ces satellites, de masse m, dans le référentiel géocentrique considéré galiléen.

Données :

- constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}
- masse de la Terre : $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
- rayon de la Terre : $R_T = 6371$ km

A.1. Sur la copie, faire un schéma, sans souci d'échelle, montrant la Terre (de centre T) et le rayon R_T, et le satellite de centre S sur son orbite à une altitude z. Représenter sur ce schéma un vecteur unitaire $\vec{n}$ dirigé du satellite vers la Terre.

A.2. Donner l'expression vectorielle, en fonction de G, m, M_T, R_T, z et $\vec{n}$, de la force gravitationnelle $\vec{F}_{T/S}$ exercée par la Terre sur le satellite supposé ponctuel. Représenter ce vecteur-force, sans souci d'échelle, sur le schéma réalisé à la question **A.1.**

A.3. En déduire l'expression vectorielle du champ gravitationnel terrestre $\vec{g}$.

A.4. En considérant uniquement l'action de la Terre, établir l'expression vectorielle de l'accélération $\vec{a}$ du satellite.

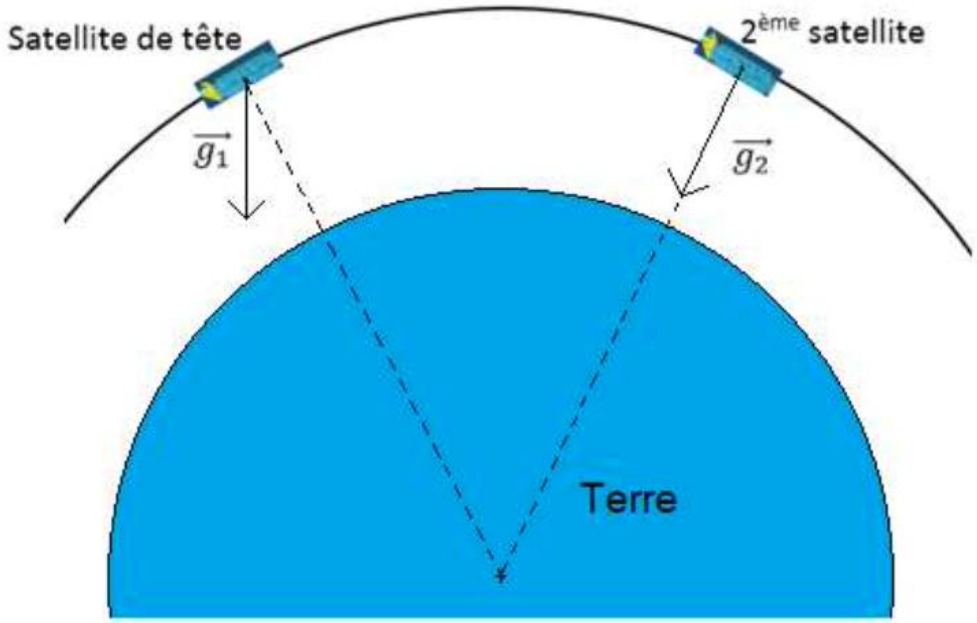
A.5. Montrer que, dans le cadre de l'approximation d'une orbite circulaire, le mouvement du satellite est uniforme.

A.6. Montrer alors que l'expression de la vitesse v du satellite s'exprime par la relation :

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + z}}$$

A.7. En déduire la valeur de la période de révolution du satellite et vérifier qu'elle est conforme à l'information de l'énoncé : « leur altitude leur permet de parcourir environ 15 fois leur orbite polaire par jour ».

On s'intéresse à la situation particulière schématisée ci-dessous. Le satellite de tête passe au-dessus d'une zone où le champ gravitationnel $\vec{g_1}$ n'est pas centripète alors que le 2ème satellite survole une zone où règne un champ gravitationnel $\vec{g_2}$ centripète.

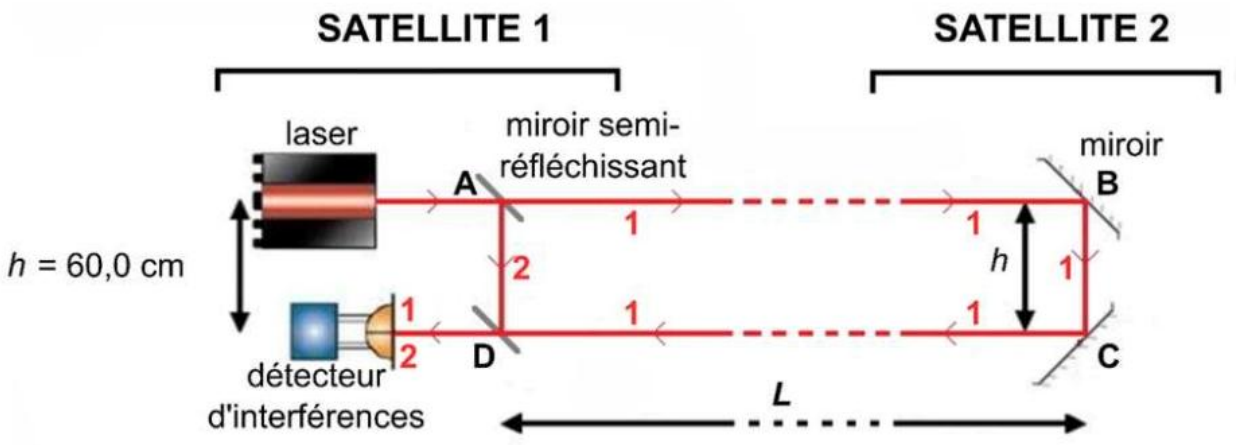


(Les échelles ne sont pas respectées)

A.8. Dans le cas de la situation schématisée, expliquer, en détaillant le raisonnement, si la distance L, entre les deux satellites, reste constante, augmente ou bien diminue.

B. Principe de fonctionnement de l'interféromètre embarqué

Le satellite de tête est affecté en premier par un changement du champ gravitationnel, cela engendre alors une légère modification de la distance le séparant du 2ème satellite. La mesure, par interférométrie, des variations de distance entre les deux satellites permet d'accéder à l'évolution du champ gravitationnel dans la région survolée. À cet effet, un interféromètre laser, dont une partie est embarquée dans le satellite de tête et l'autre partie dans le 2ème satellite, détermine avec une très grande précision la variation de distance, notée *d*, entre les deux satellites.
Le schéma simplifié du principe de fonctionnement de l'interféromètre est le suivant :



(Les échelles ne sont pas respectées)

Le faisceau lumineux issu du laser se sépare en deux faisceaux au niveau du miroir semi-réfléchissant A, un faisceau 1 parcourant le trajet ABCD, un faisceau 2 parcourant le trajet AD. Les faisceaux 1 et 2 se réunissent en D pour atteindre le détecteur d'interférences.

Le laser utilisé émet un rayonnement infrarouge de longueur d'onde λ égale à 1064 nm dans le vide.

B.1. Justifier que le dispositif présenté par le schéma simplifié permet d'obtenir des interférences.

B.2. Définir le phénomène d'interférence constructive de deux ondes.

B.3. En utilisant les informations figurant sur le schéma, établir l'expression de la différence de marche δ en fonction de *L*.

Le satellite 1 s'éloigne d'une distance *d* du satellite 2. Les deux satellites sont maintenant distants de $L + d$.

B.4. Montrer alors que la variation $\Delta\delta$ de la différence de marche vaut $2d$.

Le détecteur d'interférences est capable de repérer au mieux une variation de différence de marche qui correspond à deux états immédiatement successifs d'interférence constructive.

B.5. Justifier que la variation de distance *d* correspondant à deux états immédiatement successifs d'interférence constructive est égale à $\frac{\lambda}{2}$.

B.6. Calculer alors la plus petite valeur de la variation de distance entre les deux satellites détectable par l'interféromètre.

C. Principe des accéléromètres

Pour accéder au champ gravitationnel terrestre de manière très précise, il est indispensable de mesurer les forces non-gravitationnelles (trainée atmosphérique, pression des radiations solaires...) susceptibles de parasiter les mesures.
Des accéléromètres ultrasensibles embarqués à bord des satellites permettent d'accéder indirectement aux forces non-gravitationnelles par la mesure de la variation des capacités de plusieurs condensateurs. Une « masse d'épreuve », maintenue en suspension au centre d'une cage électrostatique, subit un déplacement lorsqu'elle est soumise à une force non-gravitationnelle. Son déplacement se traduit par la modification de la capacité de trois paires de condensateurs.

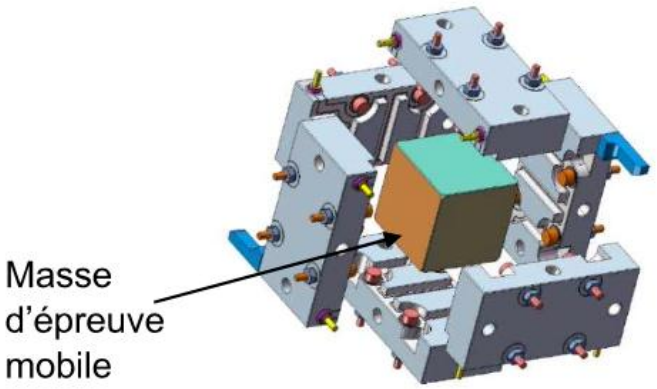
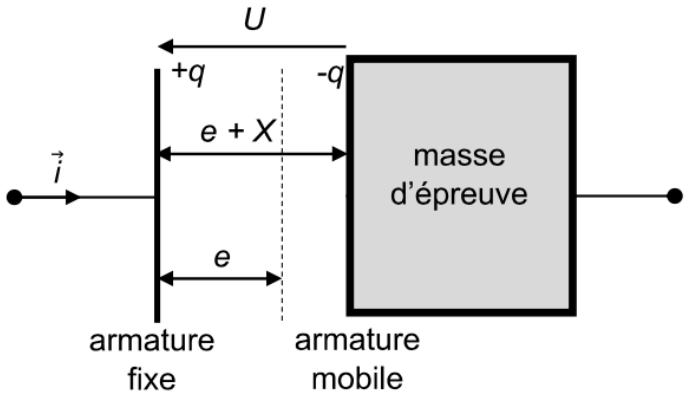


Schéma de la cage électrostatique maintenant la masse d'épreuve en suspension

On étudie le fonctionnement d'un condensateur plan dont la face gauche de la masse d'épreuve constitue l'armature mobile (voir le schéma ci-dessous), l'autre armature étant fixée sur la cage électrostatique.



On applique une tension U entre les armatures du condensateur plan. En l'absence de force non-gravitationnelle, la distance entre les deux armatures (fixe et mobile) est notée e. En présence d'une force non-gravitationnelle, l'armature mobile subit un déplacement X (compté positivement) dans la direction définie par le vecteur unitaire $\vec{\imath}$ indiqué sur le schéma ci-dessus.

Pour un condensateur plan, la capacité C s'exprime par la relation $C = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{D}$ où ε_0 représente la permittivité électrique du vide, S la surface en regard des armatures, et D la distance entre les armatures.

C.1. Discuter de l'influence du déplacement X, choisi positif, sur la valeur de la capacité C du condensateur.

C.2. Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}$ créé entre les plaques du condensateur en fonction de U, e, X et du vecteur unitaire $\vec{\imath}$.

L'armature mobile est soumise au champ $\overrightarrow{E_1}$ créé par l'armature fixe. Les lois de l'électrostatique montrent que $\overrightarrow{E_1} = \frac{\overrightarrow{E_2}}{2}$. Il en résulte que l'armature mobile subit une action mécanique modélisée par la force électrique $\vec{F}$. On s'intéresse à la situation où la charge électrique q portée par l'armature fixe est positive.

C.3. Identifier le schéma qui, parmi les quatre suivants, représente correctement le champ électrique $\vec{E}$ et la force électrique $\vec{F}$ Une argumentation est attendue.

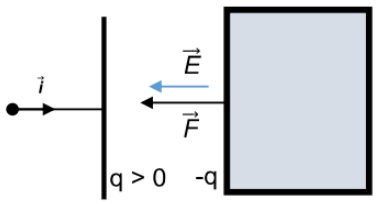


Schéma 1

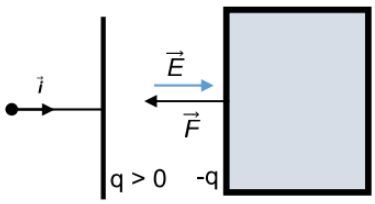


Schéma 2

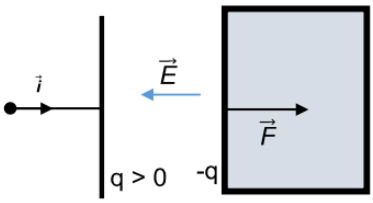


Schéma 3

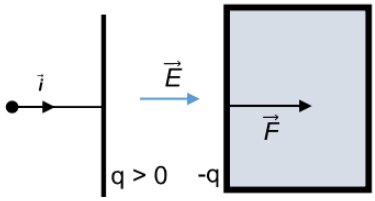
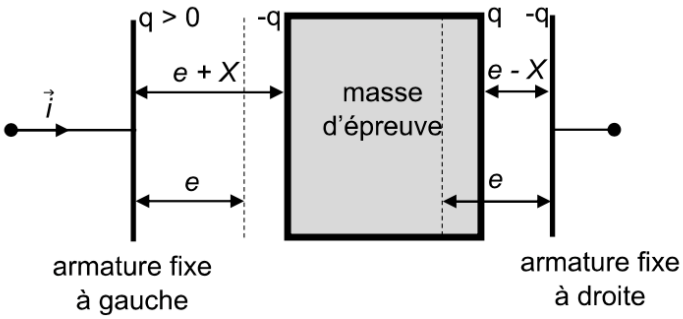


Schéma 4

Le condensateur (décrit sur le schéma précédent) est associé à un deuxième condensateur. La masse d'épreuve est mobile entre deux armatures fixes, l'une à gauche, l'autre à droite. Le dispositif est conçu de telle sorte que la force électrostatique exercée par l'armature fixe de droite sur la masse d'épreuve est exactement opposée à la force électrostatique exercée par l'armature fixe de gauche : les deux forces se compensent.



C.4. Établir la relation existant entre le champ électrique $\overrightarrow{E_d}$ créé par l'armature fixe de droite et le champ électrique $\overrightarrow{E_g}$ créé par l'armature fixe de gauche.