Un tracteur gravitationnel pour dévier un astéroïde

Bac 2022 Polynésie Jour 1 · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

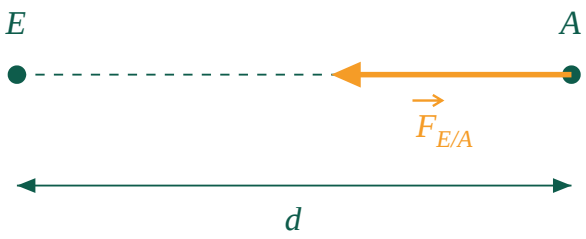
1 Représenter, sans souci d'échelle, la force d'attraction gravitationnelle $\overrightarrow{F}_{E/A}$ exercée par l'engin spatial E sur l'astéroïde A, distants de d.

La force $\overrightarrow{F}_{E/A}$ s'applique au point A, elle est portée par la droite (AE) et orientée de A vers E (force attractive).

Voir le schéma : flèche partant de A et dirigée vers E.

PIÈGE

Tracer la flèche à partir de E : ce serait la force $\overrightarrow{F}_{A/E}$ subie par l'engin. La force subie par A a son origine en A.



1 · Force exercée par l'engin E sur l'astéroïde A

2 Reproduire la figure 1 et y tracer le vecteur variation de vitesse $\Delta\overrightarrow{V}$ de l'astéroïde au point M.

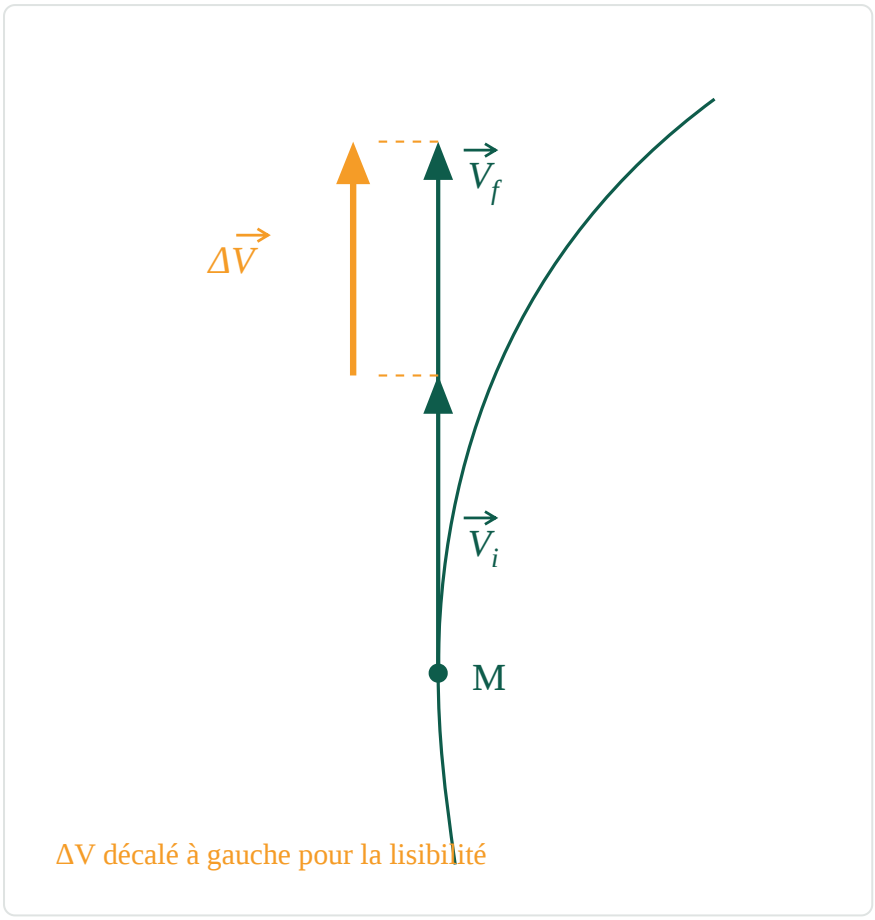
Par définition, $\Delta\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_f} - \overrightarrow{V_i}$.

Les deux vecteurs ont la même origine M, la même direction et le même sens : $\Delta\overrightarrow{V}$ relie l'extrémité de $\overrightarrow{V_i}$ à l'extrémité de $\overrightarrow{V_f}$.

$\Delta\overrightarrow{V}$ est tangent à la trajectoire en M, dans le sens du mouvement, de longueur $V_f - V_i$ (voir le schéma).

MÉTHODE

Pour construire $\overrightarrow{V_f} - \overrightarrow{V_i}$ avec deux vecteurs de même origine : on part de la pointe de $\overrightarrow{V_i}$ et on arrive à la pointe de $\overrightarrow{V_f}$. On peut ensuite reporter ce vecteur en M.



2 · Figure 1 complétée : vecteur variation de vitesse

3 Déduire de la question 2 la direction dans laquelle placer l'engin spatial E pour dévier l'astéroïde A : dans la direction de $\Delta\vec{V}$, perpendiculaire à $\Delta\vec{V}$ ou quelconque.

Deuxième loi de Newton appliquée à l'astéroïde de masse M, en ne retenant que l'action de l'engin : $\vec{F}_{E/A} = M\,\vec{a} \approx M\,\dfrac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$.

Comme M et Δt sont positifs, $\vec{F}_{E/A}$ et $\Delta\vec{V}$ ont même direction et même sens. Or cette force est dirigée de A vers E.

L'engin doit être placé **dans la direction de** $\Delta\vec{V}$, c'est-à-dire devant l'astéroïde, sur la tangente à sa trajectoire.

COMPRENDRE
L'engin attire l'astéroïde vers lui : placé devant, il l'accélère ; placé derrière, il le freinerait.

4 Donner l'expression de la norme de la force $F_{E/A}$ qu'exerce l'engin spatial sur Apophis en fonction de G, M, m et d, puis calculer sa valeur.

Données utiles $M = 4 \times 10^{10}$ kg ; $m = 5 \times 10^{3}$ kg ; $d = 240$ m ; $G = 6{,}67408 \times 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}

$$F_{E/A} = G\,\frac{M\,m}{d^2}$$

$$F_{E/A} = 6{,}67408 \times 10^{-11} \times \frac{4 \times 10^{10} \times 5 \times 10^{3}}{240^2}$$

$F_{E/A} = 0{,}2$ N

PIÈGE
Oublier le carré de la distance : on trouverait 56 N, soit 240 fois trop.

COMPRENDRE
Les masses M et m ne sont données qu'avec un chiffre significatif : le résultat s'écrit avec un seul chiffre, même si G en comporte six.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{6.67408 \times 10^{-11} \times 4 \times 10^{10} \times 5 \times 10^{3}}{240^2} \approx 0.2317389$$

5 En appliquant la deuxième loi de Newton à Apophis dans le référentiel héliocentrique, montrer que $\Delta t = \dfrac{\Delta V \times d^2}{G \times m}$.

Système {Apophis}, de masse M constante ; référentiel héliocentrique supposé galiléen. Pendant la durée Δt, la variation de vitesse étudiée est due à la force $\vec{F}_{E/A}$.

Deuxième loi de Newton : $\vec{F}_{E/A} = M\,\vec{a}$ avec $\vec{a} \approx \dfrac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$ (force constante, car d est constante).

En norme : $G\dfrac{M\,m}{d^2} = M\dfrac{\Delta V}{\Delta t}$, soit après simplification par M : $\dfrac{G\,m}{d^2} = \dfrac{\Delta V}{\Delta t}$.

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta V \times d^2}{G \times m}}$$

COMPRENDRE
La masse M de l'astéroïde disparaît : la durée nécessaire ne dépend que de la masse de l'engin et de sa distance à l'astéroïde.

6 Montrer que la durée Δt d'utilisation du tracteur pour dévier Apophis dans ces conditions est d'environ 4 jours.

Données utiles $\Delta V = 2 \times 10^{-6}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $d = 240\ \text{m}$; $m = 5 \times 10^{3}\ \text{kg}$; $G = 6{,}67408 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

$$\Delta t = \frac{\Delta V \times d^2}{G \times m} = \frac{2 \times 10^{-6} \times 240^2}{6{,}67408 \times 10^{-11} \times 5 \times 10^{3}} = 3 \times 10^{5}\ \text{s}$$

Un jour dure $24 \times 3600 = 86\,400$ s, donc $\Delta t = \dfrac{3{,}45 \times 10^{5}}{86\,400} = 4{,}0$ jours.

$\Delta t \approx 3 \times 10^{5}\ \text{s} \approx 4\ \text{jours}$: valeur attendue retrouvée.

PIÈGE
Convertir à partir de la valeur arrondie 3×10^{5} s donne 3,5 jours. On garde la valeur non arrondie de la calculatrice pour la conversion.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{2 \times 10^{-6} \times 240^2}{6.67408 \times 10^{-11} \times 5 \times 10^{3}} \approx 345216.1$$

$$\frac{\dfrac{2 \times 10^{-6} \times 240^2}{6.67408 \times 10^{-11} \times 5 \times 10^{3}}}{86\,400} \approx 3.995557$$

7 Établir la troisième loi de Kepler pour Apophis dans le référentiel héliocentrique.

Système {Apophis}, de masse M ; référentiel héliocentrique supposé galiléen ; seule force retenue : l'attraction du Soleil, $\vec{F}_{S/A} = G\dfrac{M_S\,M}{R^2}\,\vec{u}_n$ dans le repère de Frenet ($\vec{u}_n$ dirigé vers le Soleil).

Deuxième loi de Newton : $\vec{F}_{S/A} = M\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \dfrac{G\,M_S}{R^2}\,\vec{u}_n$.

Pour un mouvement circulaire uniforme, $\vec{a} = \dfrac{v^2}{R}\,\vec{u}_n$. Par identification : $\dfrac{v^2}{R} = \dfrac{G\,M_S}{R^2}$, soit $v^2 = \dfrac{G\,M_S}{R}$.

L'astéroïde parcourt le périmètre $2\pi R$ de son orbite pendant une période : $v = \dfrac{2\pi R}{T}$, donc $\dfrac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \dfrac{G\,M_S}{R}$.

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M_S}}$$

PIÈGE
Énoncer seulement « T^2/R^3 est constant » ne suffit pas : « établir » demande la démonstration et l'expression de la constante.

MÉTHODE
Toujours le même enchaînement : deuxième loi de Newton, accélération dans le repère de Frenet, expression de v, puis $v = 2\pi R/T$ pour faire apparaître la période.

8 Déterminer la valeur de la période de révolution T' d'Apophis après utilisation du tracteur gravitationnel.

Données utiles $T = 323{,}442$ jours ; augmentation de la période : 15 minutes

$T' = T + 15\text{ min}$

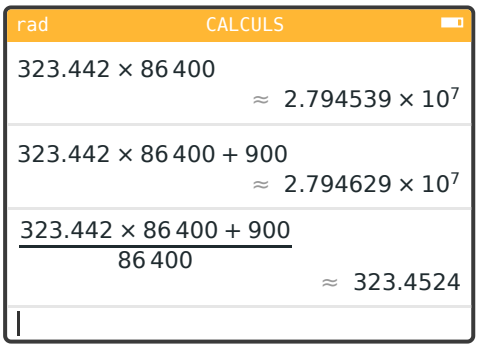
$T = 323{,}442 \times 86\,400 = 2{,}79454 \times 10^7$ s et $15\text{ min} = 15 \times 60 = 900$ s.

$T' = 2{,}79454 \times 10^7 + 900$

$$\boxed{T' = 2{,}79463 \times 10^7 \text{ s, soit } 323{,}452 \text{ jours.}}$$

COMPRENDRE
L'écart entre T et T' n'apparaît qu'au cinquième chiffre : il faut conserver six chiffres significatifs, comme pour T, sinon les deux périodes semblent égales.

À LA CALCULATRICE



9 Calculer la valeur du nouveau rayon R' de la trajectoire d'Apophis et en déduire l'augmentation ΔR, en mètre, du rayon de la trajectoire.

Données utiles $R = 1{,}37961 \times 10^{11}$ m ; $T = 2{,}79454 \times 10^{7}$ s ; $T' = 2{,}79463 \times 10^{7}$ s (Q8)

La constante $\dfrac{4\pi^2}{G\,M_S}$ est la même avant et après la déviation :

$$\frac{T'^2}{R'^3} = \frac{T^2}{R^3}$$

d'où

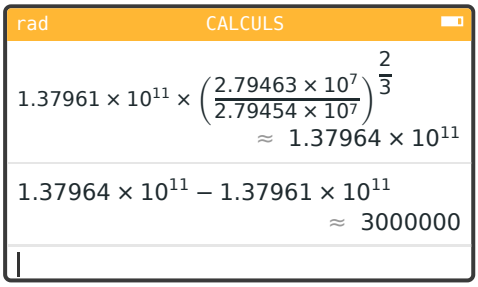
$$R' = R \times \left(\frac{T'}{T}\right)^{2/3}$$

$$R' = 1{,}37961 \times 10^{11} \times \left(\frac{2{,}79463 \times 10^{7}}{2{,}79454 \times 10^{7}}\right)^{2/3} = 1{,}37964 \times 10^{11}\ \text{m}$$

$$\Delta R = R' - R = 1{,}37964 \times 10^{11} - 1{,}37961 \times 10^{11}$$

$$\boxed{R' = 1{,}37964 \times 10^{11}\ \text{m et } \Delta R = 3 \times 10^{6}\ \text{m}}$$

À LA CALCULATRICE



PIÈGE

Arrondir R' à trois chiffres donne $\Delta R = 0$. Autre erreur fréquente : l'exposant $3/2$ au lieu de $2/3$.

COMPRENDRE

Différence de deux valeurs très proches : seul le dernier chiffre diffère, donc ΔR n'a qu'un chiffre significatif. Trois mille kilomètres de plus sur un rayon de 138 millions de kilomètres suffisent à éviter la Terre.