# Anatomie d'un condensateur

Bac 2022 Nouvelle-Calédonie Jour 2 · Exercice 4 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

**A.1** Recopier le schéma du circuit, indiquer le sens du courant d'intensité $i$ pendant le régime transitoire et représenter les tensions $E$, $u_R$ et $u_C$.

Le courant sort de la borne $+$ du générateur : il traverse K, le conducteur ohmique puis le condensateur.

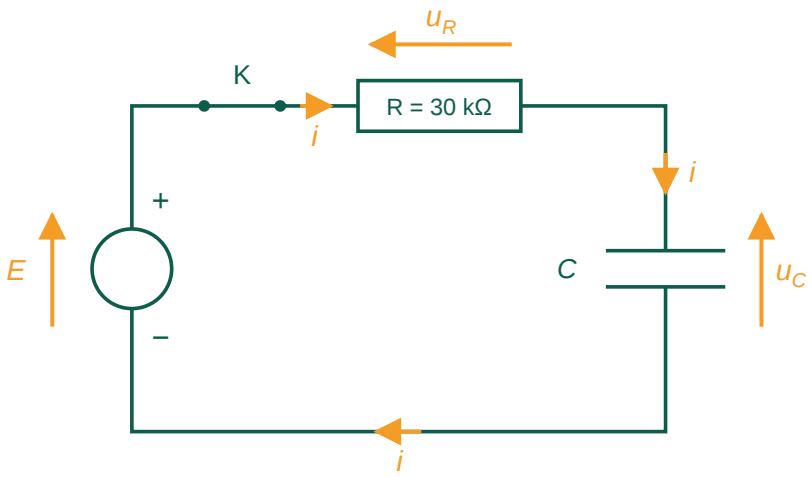
La flèche de $E$ pointe vers la borne $+$ du générateur. Les flèches de $u_R$ et $u_C$ sont tracées en convention récepteur : elles sont de sens opposé à celui de $i$.

Schéma ci-dessous : $i$ dans le sens horaire, $u_R$ et $u_C$ opposées à $i$.

**PIÈGE**

Dessiner $u_R$ ou $u_C$ dans le même sens que $i$.

Les relations $u_R = Ri$ et $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ changeraient alors de signe.




**A.1** · Circuit RC complété : courant et tensions en orange

**A.2** Établir la relation entre les tensions électriques dans ce circuit.

Loi des mailles, avec les orientations du schéma de la question A.1 :

$$E = u_R + u_C$$

**A.3** Exprimer la charge $q$ du condensateur en fonction de la tension à ses bornes.

$q$ est la charge de l'armature vers laquelle pointe la flèche de $u_C$, celle par laquelle le courant arrive.

$$q = C\,u_C$$

**A.4** Montrer que $u_C$ vérifie l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ et préciser l'expression de la constante $\tau$.

Loi d'Ohm : $u_R = R\,i$.

Intensité : $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(C\,u_C)}{\mathrm{d}t} = C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, la capacité $C$ étant constante.

On remplace dans la loi des mailles (A.2) :

$$R\,C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E$$

On divise chaque terme par $R\,C$ :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{R\,C} = \frac{E}{R\,C}$$

C'est la forme demandée, avec $\tau = R\,C$.

**MÉTHODE**
Toujours le même enchaînement pour un circuit RC : loi des mailles, loi d'Ohm, $i = C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, puis division par $R\,C$ pour isoler la dérivée.

**A.5** Proposer une dénomination pour la constante $\tau$. Montrer que cette constante a la dimension d'une durée.

$\tau$ est la **constante de temps** (ou temps caractéristique) du circuit RC.

Dans l'équation différentielle, les trois termes ont la même unité. Le terme $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ est une tension divisée par une durée : il s'exprime en $\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Le terme $\frac{u_C}{\tau}$ s'exprime donc aussi en $\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Comme $u_C$ est en volts, $\tau$ est en secondes.

$\tau = R\,C$ est homogène à une durée.

**COMPRENDRE**
Autre voie : $R = \frac{u_R}{i}$ est une tension sur une intensité, $C = \frac{q}{u_C}$ une intensité fois une durée sur une tension. Le produit $R\,C$ ne garde que la durée.

**A.6.1** Déterminer graphiquement la valeur de $\tau$ en faisant apparaître les traits de construction sur le graphe de l'annexe.

**Données utiles** $E = 12$ V

La courbe tend vers la valeur finale $u_C = E = 12$ V. À la date $t = \tau$, la tension vaut 63 % de cette valeur finale :

$u_C(\tau) = 0{,}63 \times 12 = 7{,}6$ V

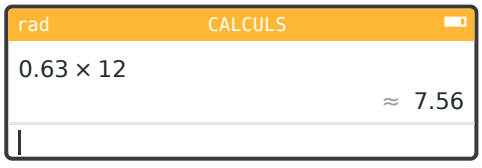
On trace l'horizontale d'ordonnée 7,6 V jusqu'à la courbe, puis on descend à la verticale jusqu'à l'axe des temps.

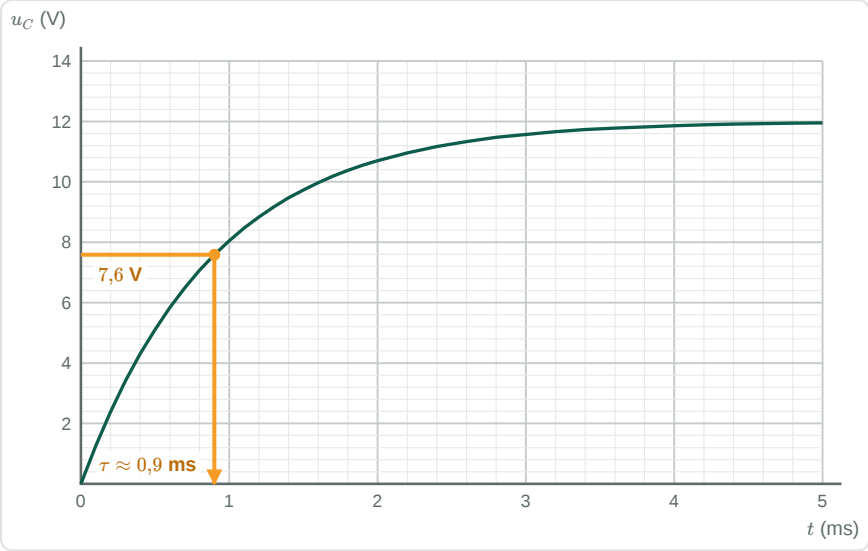
$\tau \approx 0{,}9$ ms

**COMPRENDRE**
Le 63 % vient de la solution $u_C = E\,(1 - e^{-t/\tau})$ : à $t = \tau$, $1 - e^{-1} = 0{,}63$. Une graduation valant 0,2 ms, la lecture est fiable à 0,1 ms près.

**MÉTHODE**
Seconde construction possible : la tangente à l'origine coupe l'asymptote $u_C = E$ à l'abscisse $\tau$. Elle est moins précise, car le tracé d'une tangente à la main est délicat.

**À LA CALCULATRICE**






**A.6.1** · Annexe 2 complétée : lecture de la constante de temps

**A.6.2** En déduire la valeur de la capacité $C$ du condensateur dans le cadre du modèle du circuit RC.

**Données utiles** $\tau = 0{,}90$ ms (A.6.1) ; $R = 30\ \text{k}\Omega$

$\tau = RC$ donc $C = \dfrac{\tau}{R}$

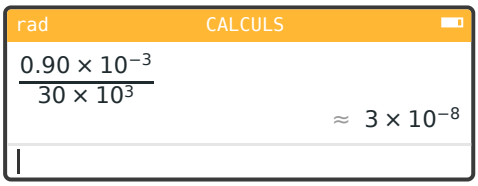
$$C = \frac{0{,}90 \times 10^{-3}}{30 \times 10^{3}} = 3{,}0 \times 10^{-8}\ \text{F}$$

$C = 3{,}0 \times 10^{-8}\ \text{F} = 30\ \text{nF}$

**PIÈGE**
Laisser $\tau$ en millisecondes ou $R$ en kilo-ohms : le résultat serait faux d'un facteur $10^3$ ou $10^6$.

**COMPRENDRE**
Deux chiffres significatifs, comme $R$ et la lecture de $\tau$. La valeur est proche des 33 nF du tableau du fabricant.

**À LA CALCULATRICE**




**B.1** Décrire l'influence des caractéristiques géométriques du condensateur plan sur la valeur de sa capacité.

D'après $C = \dfrac{\varepsilon \times S}{a}$, pour un isolant donné ($\varepsilon$ fixée) :

- $C$ est proportionnelle à la surface $S$ des armatures : si $S$ double, $C$ double ;
- $C$ est inversement proportionnelle à l'épaisseur $a$ de l'isolant : si $a$ double, $C$ est divisée par deux.

$C$ augmente quand $S$ augmente et quand $a$ diminue.

**B.2.1** Établir l'expression de la capacité $C$ du condensateur en fonction de $h$, $L$, $e$ et du nombre $n$ de condensateurs empilés.

Chaque condensateur élémentaire a des armatures rectangulaires de surface $S = L \times h$, donc $C_0 = \dfrac{\varepsilon \times L \times h}{a}$.

L'épaisseur des armatures étant négligeable, l'épaisseur totale est celle des $n$ couches d'isolant : $e = n \times a$, donc $a = \dfrac{e}{n}$.

Comme $C = n \times C_0$ :

$$C = n \times \frac{\varepsilon \times L \times h}{e/n}$$

$$\boxed{C = \frac{n^2 \times \varepsilon \times L \times h}{e}}$$

**PIÈGE**
Oublier que $a$ dépend de $n$ et s'arrêter à $C = \dfrac{n\,\varepsilon\,L\,h}{a}$ : l'énoncé demande une expression avec $e$, pas avec $a$.

**B.2.2** La capacité du condensateur valant $C = 33$ nF, en déduire le nombre $n$ de condensateurs élémentaires qui le constituent.

**Données utiles** $\varepsilon = 2{,}57 \times 10^{-11}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$ ; ligne 33,0 nF du tableau : $L = 11{,}0$ mm ; $h = 9{,}0$ mm ; $e = 6{,}0$ mm

De la relation de la question B.2.1 : $n^2 = \dfrac{C \times e}{\varepsilon \times L \times h}$, et $n$ est positif,

donc $n = \sqrt{\dfrac{C \times e}{\varepsilon \times L \times h}}$

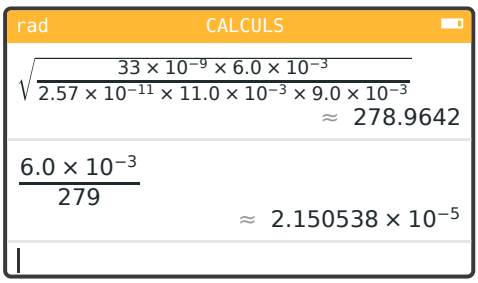
$$n = \sqrt{\frac{33 \times 10^{-9} \times 6{,}0 \times 10^{-3}}{2{,}57 \times 10^{-11} \times 11{,}0 \times 10^{-3} \times 9{,}0 \times 10^{-3}}} = 279$$

$n \approx 279$, soit environ $2{,}8 \times 10^2$ condensateurs élémentaires.

**PIÈGE**
Laisser $L$, $h$ et $e$ en millimètres alors que $\varepsilon$ est en $\mathrm{F \cdot m^{-1}}$, ou oublier la racine carrée.

**COMPRENDRE**
Chaque couche d'isolant mesure alors $a = \dfrac{e}{n} \approx 22\ \mu\mathrm{m}$ : c'est bien un film très mince, comme le décrit l'énoncé.

**À LA CALCULATRICE**



**B.2.3** Le fabricant indique que le condensateur étudié est constitué de 300 armatures métalliques. Commenter.

**Données utiles** $n = 279$ (B.2.2) ; incertitudes du tableau : $C$ à 2 % près ; $L$, $h$ et $e$ à 0,5 mm près

Un isolant sépare deux armatures consécutives : 300 armatures forment $300 - 1 = 299$ condensateurs élémentaires. Le calcul donne 279, soit un écart de 20.

Encadrons $n$ avec les incertitudes du tableau.

Valeur minimale ($C$ et $e$ minimales, $L$ et $h$ maximales) : $C = 0{,}98 \times 33 = 32{,}34$ nF, $e = 5{,}5$ mm, $L = 11{,}5$ mm, $h = 9{,}5$ mm, d'où $n_{\text{min}} = 252$.

Valeur maximale ($C$ et $e$ maximales, $L$ et $h$ minimales) : $C = 1{,}02 \times 33 = 33{,}66$ nF, $e = 6{,}5$ mm, $L = 10{,}5$ mm, $h = 8{,}5$ mm, d'où $n_{\text{max}} = 309$.

$252 \leqslant 299 \leqslant 309$ : l'indication du fabricant est compatible avec le modèle, compte tenu des incertitudes.

**PIÈGE**
Confondre armatures et condensateurs : $N$ armatures empilées délimitent $N - 1$ couches d'isolant, donc $N - 1$ condensateurs élémentaires.

**COMPRENDRE**
L'incertitude de 0,5 mm pèse lourd sur des dimensions de 6 à 11 mm : près de 8 % sur $e$. C'est elle qui explique la largeur de l'encadrement.

**À LA CALCULATRICE**

