Modélisation d'un service au tennis

Bac 2022 Nouvelle-Calédonie Jour 2 · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

A.1 Poser le cadre de l'étude à partir des conditions initiales données : position de la balle au moment de la frappe et vecteur vitesse initiale.

Système : la balle, assimilée à son centre de masse G, de masse m constante. Référentiel : terrestre, supposé galiléen.

Bilan des forces : l'action de l'air étant négligée, la balle n'est soumise qu'à son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$, vertical et dirigé vers le bas.

À $t = 0$: $x(0) = 0$, $y(0) = H$, $v_x(0) = v_0$ et $v_y(0) = 0$.

COMPRENDRE
L'axe (Oy) est vertical vers le haut, donc $\vec{g}$ a pour composantes $(0\,;\,-g)$. La vitesse initiale est horizontale : sa composante verticale est nulle.

A.1.1 En appliquant une loi de Newton, à énoncer, déterminer les composantes a_x et a_y du vecteur accélération de G.

Deuxième loi de Newton : dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées au système est égale au produit de sa masse par l'accélération de son centre de masse, $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$.

Ici $\vec{P} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

$a_x = 0$ et $a_y = -g$

PIÈGE
L'énoncé de la loi est demandé : l'écrire en toutes lettres, avec le référentiel galiléen, et non la seule formule. Oublier le signe moins de a_y fausse toute la suite.

A.1.2 Déterminer les composantes v_x et v_y du vecteur vitesse de G.

Comme $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives de a_x et a_y :

$v_x(t) = C_1$ et $v_y(t) = -g\,t + C_2$.

Les constantes sont fixées par la vitesse initiale : $v_x(0) = v_0$ donne $C_1 = v_0$; $v_y(0) = 0$ donne $C_2 = 0$.

$v_x(t) = v_0$ et $v_y(t) = -g\,t$

MÉTHODE
Accélération, puis vitesse, puis position : à chaque étape on prend une primitive et on détermine la constante avec la condition initiale correspondante, écrite explicitement.

A.1.3 Déterminer les composantes x et y du vecteur position $\overrightarrow{OG}$.

Comme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$, on prend les primitives de v_x et v_y :

$x(t) = v_0\,t + C_3$ et $y(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + C_4$.

À $t = 0$, la balle est en B : $x(0) = 0$ donne $C_3 = 0$; $y(0) = H$ donne $C_4 = H$.

$x(t) = v_0\,t$ et $y(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + H$

PIÈGE
Oublier la constante H : la balle part du point B, pas de l'origine O du repère.

A.2 En déduire que l'équation de la trajectoire de G s'écrit $y(x) = -\dfrac{g}{2\,v_0^2}\,x^2 + H$.

On élimine le temps : $x = v_0\,t$ donne $t = \dfrac{x}{v_0}$.

En reportant dans $y(t)$: $y = -\dfrac{1}{2}\,g\left(\dfrac{x}{v_0}\right)^2 + H$

$y(x) = -\dfrac{g}{2\,v_0^2}\,x^2 + H$, ce qui est l'équation attendue.

COMPRENDRE
C'est un arc de parabole dont le sommet est le point B : la balle ne fait que descendre, puisque sa vitesse initiale est horizontale.

B.1 À partir de l'équation de la trajectoire, exprimer la vitesse initiale v_0 en fonction de $y(x)$, x, g et H.

$y(x) = -\dfrac{g}{2\,v_0^2}\,x^2 + H$ donne $\dfrac{g\,x^2}{2\,v_0^2} = H - y(x)$, soit $v_0^2 = \dfrac{g\,x^2}{2\,(H - y(x))}$.

Comme $v_0 > 0$ et $x > 0$:

$v_0 = x\sqrt{\dfrac{g}{2\,(H - y(x))}}$

COMPRENDRE
La balle descend, donc $H - y(x) > 0$: la racine carrée existe toujours. Pour une hauteur d'arrivée donnée, v_0 est proportionnelle à la distance horizontale x à atteindre.

B.2 Déterminer, à partir des documents, les coordonnées des points C et D.

Données utiles figure 1 : $5{,}50$ m entre la ligne de fond et la ligne de service ; $6{,}40$ m entre la ligne de service et le filet ; hauteur du filet au centre $0{,}91$ m

C est le sommet du filet, au centre du court : $x_C = 5{,}50 + 6{,}40 = 11{,}90$ m et $y_C = 0{,}91$ m.

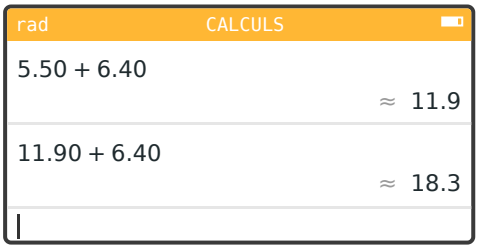
D est au sol, sur la ligne de service du camp adverse : $x_D = 11{,}90 + 6{,}40 = 18{,}30$ m et $y_D = 0$ m.

$C\,(11{,}90\text{ m}\,;\,0{,}91\text{ m})$ et $D\,(18{,}30\text{ m}\,;\,0\text{ m})$

PIÈGE
Prendre $1{,}07$ m pour le filet : c'est sa hauteur aux poteaux. Au centre, là où passe l'axe (Ox), il mesure $0{,}91$ m. Ne pas placer D sur la ligne de fond ($23{,}78$ m).

COMPRENDRE
Vérification : la moitié de la longueur du court vaut $23{,}78 \div 2 = 11{,}89$ m, en accord à un centimètre près avec x_C.

À LA CALCULATRICE



B.3 Pour une balle frappée à la hauteur $H = 2{,}6$ m, en déduire les valeurs extrêmes $v_{0\min}$ et $v_{0\max}$ de la vitesse initiale pour que le service soit valide.

Données utiles $g = 9{,}81\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$; $H = 2{,}6$ m ; expression de v_0 (B.1) ; coordonnées de C et D (B.2)

Vitesse minimale : la trajectoire passe juste par C.

$$v_{0\min} = x_C\sqrt{\frac{g}{2\,(H - y_C)}} = 11{,}90 \times \sqrt{\frac{9{,}81}{2 \times (2{,}6 - 0{,}91)}} = 20\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Vitesse maximale : la balle touche le sol en D.

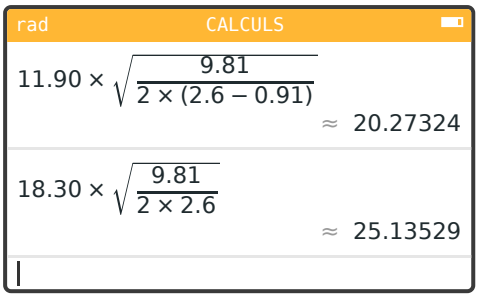
$$v_{0\max} = x_D\sqrt{\frac{g}{2\,(H - y_D)}} = 18{,}30 \times \sqrt{\frac{9{,}81}{2 \times (2{,}6 - 0)}} = 25\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$v_{0\min} = 20\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $v_{0\max} = 25\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$: le service est valide si $20\text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \leqslant v_0 \leqslant 25\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

PIÈGE
Inverser les rôles : le filet (C) impose la vitesse minimale, la ligne de service (D) la vitesse maximale. Une balle plus rapide tombe plus loin.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme la donnée la moins précise, $H = 2{,}6$ m. Ces vitesses correspondent à environ 73 et $90\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

À LA CALCULATRICE



B.4 La vitesse initiale réellement mesurée lors d'un service est nettement supérieure aux vitesses calculées. Commenter.

Avec le modèle, une balle lancée horizontalement à plus de $25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ tomberait au-delà de la ligne de service. Si un service réel, bien plus rapide, est tout de même valide, c'est que certaines hypothèses du modèle ne sont pas vérifiées :

- la vitesse initiale n'est pas horizontale : le joueur frappe la balle vers le bas, ce qui raccourcit la trajectoire ;
- l'action de l'air n'est pas négligeable : les frottements freinent la balle, qui retombe plus tôt ;
- la balle tourne sur elle-même : l'effet donné modifie la trajectoire.

Le modèle (vitesse initiale horizontale, air et rotation négligés) est trop simple pour décrire un service réel.

MÉTHODE
Pour commenter un écart entre modèle et mesure, reprendre une à une les hypothèses du modèle et dire dans quel sens chacune, si elle est fausse, modifie le résultat.

C À partir d'une étude énergétique du mouvement réel (tableau de t, y et v), montrer que l'hypothèse « l'action de l'air est négligeable » n'est pas vérifiée.

Données utiles $m = 58\ \text{g} = 0{,}058\ \text{kg}$; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; à $t = 0$: $y = 2{,}58\ \text{m}$, $v = 47{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; à $t = 0{,}27\ \text{s}$: $y = 1{,}10\ \text{m}$, $v = 35{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Si l'action de l'air est négligeable, la balle n'est soumise qu'à son poids, force conservative : son énergie mécanique doit rester constante.

On calcule $E_m = E_c + E_{pp} = \frac{1}{2} m v^2 + m g y$ (référence de l'énergie potentielle au sol) pour chaque date du tableau.

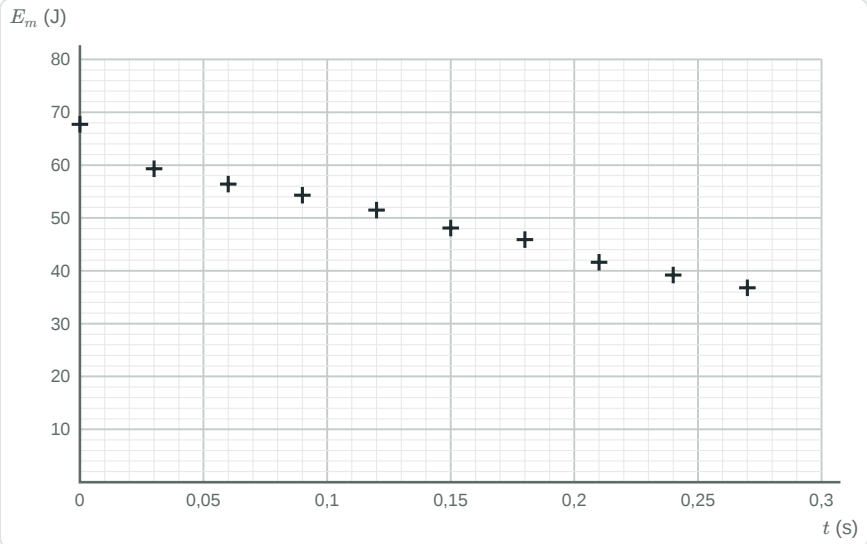
À $t = 0$: $E_m = \frac{1}{2} \times 0{,}058 \times 47{,}8^2 + 0{,}058 \times 9{,}81 \times 2{,}58 = 68\ \text{J}$

À $t = 0{,}27\ \text{s}$: $E_m = \frac{1}{2} \times 0{,}058 \times 35{,}3^2 + 0{,}058 \times 9{,}81 \times 1{,}10 = 37\ \text{J}$

t (s)	0,00	0,03	0,06	0,09	0,12
E_m (J)	68	59	56	54	52
t (s)	0,15	0,18	0,21	0,24	0,27
E_m (J)	48	46	42	39	37

L'énergie mécanique diminue sans cesse : elle passe de 68 J à 37 J en $0{,}27$ s, soit une perte de près de la moitié. Cette énergie est dissipée par le travail résistant des frottements de l'air.

E_m n'est pas conservée (68 J puis 37 J) : l'action de l'air n'est pas négligeable, l'hypothèse n'est pas vérifiée.



C · Énergie mécanique de la balle calculée à partir du tableau

PIÈGE

Laisser la masse en grammes : E_m n'est en joules que si m est en kilogrammes. Dire seulement « la vitesse diminue » ne suffit pas, il faut des valeurs de E_m.

COMPRENDRE

En chute libre, la balle descend donc sa vitesse devrait augmenter. Ici elle diminue alors que l'altitude baisse aussi : E_c et E_{pp} décroissent ensemble, ce qui est impossible sans force dissipative.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$0.5 \times 0.058 \times 47.8^2 + 0.058 \times 9.81 \times 2.58$

$\approx$ 67.72833

$0.5 \times 0.058 \times 35.3^2 + 0.058 \times 9.81 \times 1.10$

$\approx$ 36.76249